LINGKARAN

MATEMATIKA PEMINATAN KELAS XI

PENYUSUN
Asmar Achmad

SMA Negeri 17 Makassar

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Lingkaran	:	Tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu yang disebut pusat lingkaran.
Jari-jari lingkaran	:	Jarak titik pusat ke titik pada lingkaran.
Garis singgung lingkaran	:	Garis yang melalui atau memotong di satu titik pada lingkaran.
Berkas lingkaran	:	Lingkaran-lingkaran yang dibuat melalui dua titik potong lingkaran yang diketahui.
Tali busur sekutu	:	Tali busur yang melalui titik potong dua lingkaran

PETA KONSEP

LINGKARAN
Persamaan Lingkaran
Kedudukan Titik dan Garis Terhadap Lingkaran
Persamaan Garis Singgung Lingkaran
Kedudukan Dua Lingkaran
Berpusat di $O(0, 0)$ dan jari-jari r
Berpusat di $M(a, b)$ dan jari-jari r
Persamaan Umum Lingkaran
Persamaan Garis Singgung Melalui Titik pada Lingkaran
Persamaan Garis Singgung dengan Gradien m
Persamaan Garis Singgung Melalui Titik di luar Lingkaran

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Peminatan
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	12 JP (4 Kegiatan Pembelajaran)
Judul Modul	:	Lingkaran

B. Kompetensi Dasar

3.3. Menganalisis lingkaran secara analitik.

4.3. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan lingkaran.

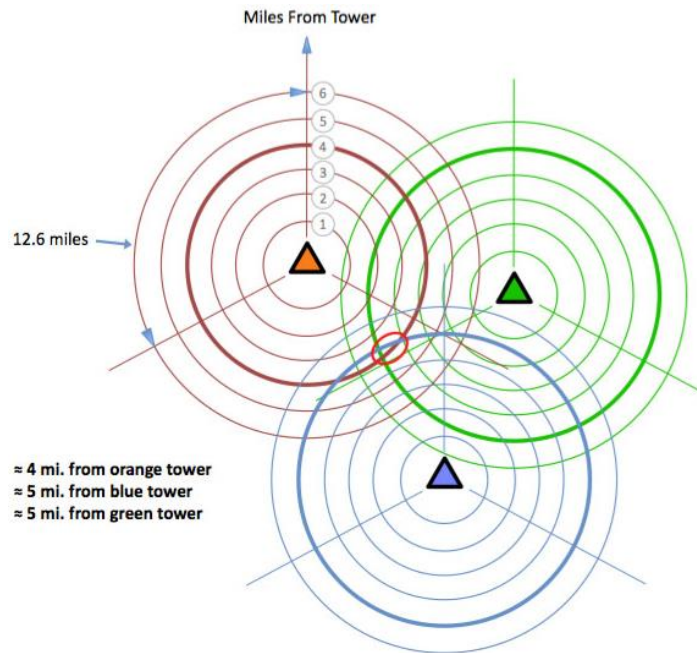
C. Deskripsi Singkat Materi

Lingkaran merupakan salah satu objek geometri yang banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Benda-benda di sekitar kita banyak yang dibuat dalam bentuk lingkaran, seperti jam, koin, ban, cincin, CD-R, kancing baju, dan banyak lagi benda-benda lainnya.

Gambar 1. Benda-benda berbentuk lingkaran
Sumber: www.sangpendidik.com/2020/04/pembahasan-lajaring-sd-melalui-tvri-16.html

Tak jarang dalam kejadian sehari-hari, bahasa lingkaran jadi alat komunikasi yang paling tepat untuk menyampaikan suatu informasi. Misalnya dengan mengatakan suatu gempa mengguncang kota A dengan pusat di titik B dan radius r km. Dengan informasi ini kita bisa mengetahui apakah penduduk di kota C yang tak jauh dari kota A merasakan dampak dari gempa atau tidak.

Gambar 2. Radius gempa
Sumber: https://asset-a.grid.id/crop/0x0:0x0/700x465/photo/2018/09/28/1281976905.jpg

Pengguna telepon selular saat ini dapat menentukan lokasi dengan cepat. Apalagi jika berada di daerah yang padat penduduk. Hal ini dimungkinkan berkat teknologi yang dipasang di telepon selular dan stasiun BTS (base transceiver station) yang sanggup mengukur kekuatan dan waktu tempuh yang diterima. Berdasarkan kedua data ini, jarak telepon selular dan BTS dapat ditentukan. Misalkan sebuah telepon berada di posisi 6 mil dari BTS A, 5 mil dari BTS B, dan 7 mil dari BTS C, maka dapat diidentifikasi bahwa telepon tersebut berada pada sebuah titik yang merupakan perpotongan ketiga lingkaran.

Gambar 3. Triangulasi Lokasi Telepon Selular
Sumber: https://globalwrong.files.wordpress.com/2012/06/tower-4.jpg

Informasi di atas memberikan gambaran tentang pemanfaatan lingkaran dalam kehidupan sehari-hari.
Modul ini akan membahas materi lingkaran secara analitik yang terdiri dari persamaan lingkaran, kedudukan titik dan garis terhadap lingkaran, persamaan garis singgung lingkaran, dan kedudukan dua lingkaran.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi kalian dalam melakukan kegiatan belajar secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan kalian dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.

6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan kalian terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar kalian dapat mengukur penguasaan kalian terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan kalian dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan kalian untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **4** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Persamaan Lingkaran (4 JP)

Kedua : Kedudukan Titik dan Garis Terhadap Lingkaran (2 JP)

Ketiga : Persamaan Garis Singgung Lingkaran (4 JP)

Keempat : Irisan Dua Lingkaran (2 JP)

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
PERSAMAAN LINGKARAN

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat menyusun persamaan lingkaran yang diketahui titik pusat dan jari-jarinya, menganalisis lingkaran yang memenuhi kriteria tertentu secara analitik, dan menyelesaikan masalah yang terkait dengan persamaan lingkaran.

B. Uraian Materi

Lingkaran merupakan tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Titik tertentu ini dinamakan sebagai pusat lingkaran. Jarak titik pusat ke titik pada lingkaran dinamakan sebagai jari-jari.

Konsep lingkaran yang meliputi luas, keliling, panjang tali busur, luas juring, serta menghitung panjang garis singgung lingkaran telah kalian pelajari di SMP. Sekarang, kita akan mempelajari konsep lingkaran secara analitik meliputi persamaan lingkaran, kedudukan titik dan garis terhadap lingkaran, persamaan garis singgung lingkaran, dan berkas lingkaran.

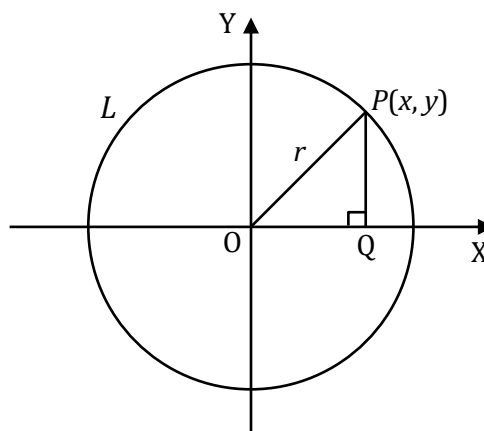
1. Persamaan Lingkaran yang Berpusat di O(0, 0) dan Berjari-jari *r*

Perhatikan gambar di samping.
Lingkaran L berpusat di O(0, 0) dan berjari-jari r.

Misalkan titik P(x, y) adalah sembarang titik yang terletak pada lingkaran L.
Jari-jari OP = r

Segitiga POQ siku-siku di Q, berdasarkan Theorema Phytagoras diperoleh:

$OQ^2 + PQ^2 = OP^2$

$x^2 + y^2 = r^2$

Gambar 1.1. Lingkaran berpusat di O(0, 0)

Titik P(x, y) yang diambil adalah sembarang, sehingga persamaan tersebut juga berlaku umum untuk persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan memiliki jari-jari r.

Contoh 1.

a. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan memiliki jari-jari
   i). $r = 4$ ii). $r = 4\sqrt{3}$

b. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan melalui titik (6, –8).

c. Tentukan jari-jari lingkaran dengan persamaan :
   i). $x^2 + y^2 = 121$ ii). $x^2 + y^2 = 128$

Jawab

a. Persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan berjari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$
   i). $r = 4$, maka persamaannya adalah $x^2 + y^2 = 4^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$
   ii). $r = 4\sqrt{3}$, maka persamaannya adalah $x^2 + y^2 = (4\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 48$

b. Persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) adalah $x^2 + y^2 = r^2$
   Lingkaran melalui titik (6, –8), sehingga diperoleh $6^2 + (-8)^2 = r^2$
   $\Leftrightarrow 36 + 64 = r^2$
   $\Leftrightarrow r^2 = 100$
   Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat O(0, 0) dan melalui titik (6, –8) adalah $x^2 + y^2 = 100$.

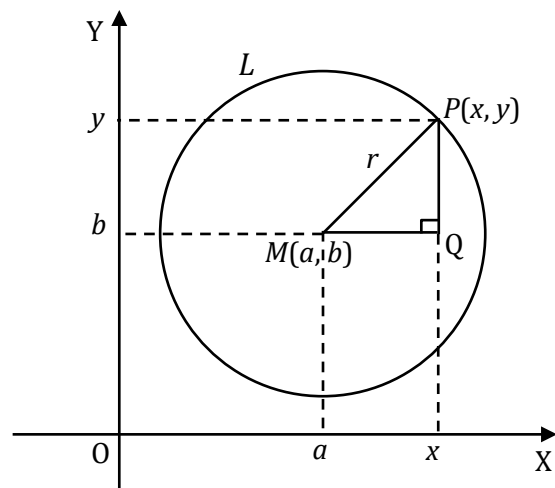
c. i). $x^2 + y^2 = 121$
   $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 121$
   $\Leftrightarrow r = \sqrt{121} = 11$
   ii). $x^2 + y^2 = 128$
   $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 128$
   $\Leftrightarrow r = \sqrt{128} = \sqrt{64 \times 2} = 8\sqrt{2}$

2. Persamaan Lingkaran yang Berpusat di M(a, b) dan Berjari-jari r

Perhatikan gambar di samping. Lingkaran L berpusat di M(a, b) dan berjari-jari r.

Misalkan P(x, y) adalah sembarang titik yang terletak pada lingkaran L.
Jari-jari MP = r
MQ = $x - a$
PQ = $y - b$
Segitiga PMQ siku-siku di Q, maka berdasarkan Theorema Phytagoras berlaku :

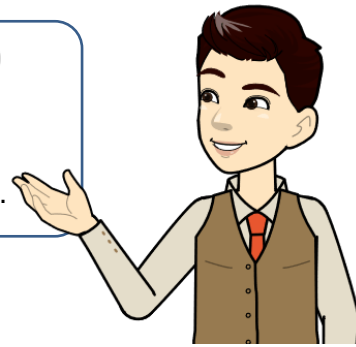
$MQ^2 + PQ^2 = MP^2$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Gambar 1.2. Lingkaran berpusat di M(a, b)

Karena titik P(x, y) diambil sembarang, maka persamaan tersebut juga berlaku umum untuk persamaan lingkaran yang berpusat di titik $M(a, b)$ dan memiliki jari-jari r. Bentuk persamaan ini disebut *bentuk baku persamaan lingkaran*.

persamaan lingkaran yang berpusat di titik $M(a, b)$ dan memiliki jari-jari r

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

disebut sebagai bentuk baku persamaan lingkaran.

Contoh 2.

Tentukan persamaan lingkaran

a. berpusat di (4, –5) dan memiliki jari-jari 6.
b. berpusat di (–2, –6) dan memiliki jari-jari $3\sqrt{2}$.

Jawab

a. Titik pusat lingkaran (4, –5) dan jari-jari $r = 6$, maka persamaannya adalah
   $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
   $\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - (-5))^2 = 6^2$
   $\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 36$

b. Titik pusat lingkaran (–2, –6) dan jari-jari $r = 3\sqrt{2}$, maka persamaannya adalah
   $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
   $\Leftrightarrow (x - (-2))^2 + (y - (-6))^2 = (3\sqrt{2})^2$
   $\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 18$

Contoh 3.

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan

a. $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 81$
b. $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 72$

Jawab

a. $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 81$
   $\Leftrightarrow (x - (-1))^2 + (y - (-3))^2 = 81$
   maka pusat lingkaran (–1, –3) dan jari-jari $r = \sqrt{81} = 9$

b. $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 72$
   $\Leftrightarrow (x - (-5))^2 + (y - 2)^2 = 72$
   maka pusat lingkaran (–5, 2) dan jari-jari $r = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

Contoh 4.

Diketahui sebuah lingkaran dengan pusat M(7, –2). Lingkaran tersebut melalui titik A(–2, 10). Hitung jari-jari lingkaran, kemudian tentukan persamaannya.

Jawab

Jari-jari r adalah jarak antara titik M(7, –2) dan titik A(–2, 10).
Dengan menggunakan rumus jarak diperoleh :

$$r = MA = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2 - 7)^2 + (10 - (-2))^2}$$

$$= \sqrt{(-9)^2 + (12)^2} = \sqrt{81 + 144}$$

$$= \sqrt{225} = 15$$

Persamaan lingkaran dengan pusat M(7, –2) dan jari-jari $r = 15$ adalah

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x - 7)^2 + (y - (-2))^2 = 15^2$

$\Leftrightarrow (x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 225$

3. Persamaan Umum Lingkaran

Dari bentuk baku persamaan lingkaran, kita dapat menentukan bentuk umum persamaan lingkaran sebagai berikut.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (-2a)x + (-2b)y + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$

Misalkan: $A = -2a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}A$

$B = -2b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}B$

$C = a^2 + b^2 - r^2 \Leftrightarrow r^2 = a^2 + b^2 - C$

$\Leftrightarrow r^2 = \left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 - C$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

Diperoleh persamaan umum lingkaran: $\boldsymbol{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$

dengan pusat $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ dan jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

Contoh 5.

Tuliskan persamaan umum lingkaran yang berpusat di M(–4, 3) dan berjari-jari 7.

Jawab

Pusat (–4, 3) dan $r = 7$, maka persamaannya:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - (-4))^2 + (y - 3)^2 = 7^2$

$\Leftrightarrow (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 49$

$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 49$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 6y - 24 = 0$

atau dengan menentukan $A = -2a$, $B = -2b$, dan $C = a^2 + b^2 - r^2$

diperoleh $A = -2(-4) = 8$

$B = -2(3) = -6$

$C = (-4)^2 + 3^2 - 7^2 = 16 + 9 - 49 = -24$

maka persamaan lingkaran adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 6y - 24 = 0$

Contoh 6.

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

Jawab

Dari soal diperoleh A = –6, B = 4, dan C = –3.

Pusat lingkaran $\left(-\frac{1}{2}\text{A}, -\frac{1}{2}\text{B}\right) = \left(-\frac{1}{2}(-6), -\frac{1}{2}(4)\right) = (3, -2)$

jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} = \sqrt{\frac{1}{4}(-6)^2 + \frac{1}{4}(4)^2 - (-3)}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}(36) + \frac{1}{4}(16) + 3} = \sqrt{9 + 4 + 3} = \sqrt{16} = 4$

Contoh 7.

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan
$4x^2 + 4y^2 - 80x + 12y + 265 = 0$

Jawab

Pertama, koefisien x^2 dan y^2 harus dijadikan satu dengan cara mengalikan persamaan dengan $\frac{1}{4}$, sehingga persamaan menjadi $x^2 + y^2 - 20x + 3y + \frac{265}{4} = 0$

Dari persamaan tersebut diperoleh A = –20, B = 3, dan C = $\frac{265}{4}$.

Pusat lingkaran $\left(-\frac{1}{2}\text{A}, -\frac{1}{2}\text{B}\right) = \left(-\frac{1}{2}(-20), -\frac{1}{2}(3)\right) = (10, -\frac{3}{2})$

jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} = \sqrt{\frac{1}{4}(-20)^2 + \frac{1}{4}(3)^2 - (\frac{265}{4})}$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(400) + \frac{1}{4}(9) - \frac{265}{4}} = \sqrt{\frac{400}{4} + \frac{9}{4} - \frac{265}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{144}{4}} = \frac{12}{2} = 6$$

4. Persamaan Lingkaran yang Memenuhi Kriteria Tertentu

Untuk menentukan persamaan suatu lingkaran dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu:

a. Tentukan pusat dan jari-jarinya, kemudian substitusikan ke persamaan
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

b. Tentukan nilai A, B, dan C kemudian substitusikan ke persamaan
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Contoh 8.

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan menyinggung garis
$3x - 4y + 5 = 0$

Jawab

Untuk menentukan persamaan lingkaran tersebut, kita harus tahu nilai r. Jari-jari lingkaran adalah jarak titik pusat ke garis yang menyinggung lingkaran.
Jarak sembarang titik (x_1, y_1) ke sebarang garis $Ax + By + C = 0$ adalah

$$r = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

berarti jarak antara titik O(0, 0) dengan garis $3x - 4y + 5 = 0$ adalah :

$$r = \frac{|3(0) - 4(0) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{5}{5} = 1$$

Jadi, persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan menyinggung garis $3x - 4y + 5 = 0$ adalah $x^2 + y^2 = 1$

Contoh 9.

Tentukan persamaan lingkaran yang diameternya merupakan ruas garis yang menghubungkan titik P(1, –4) dan Q(–3, 2).

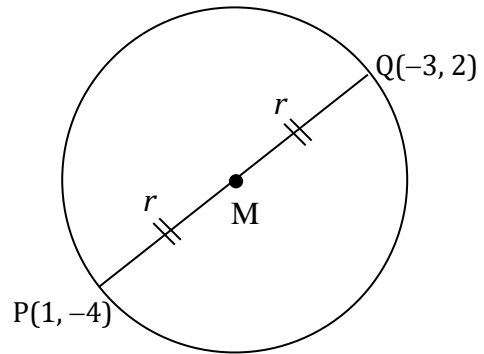
Jawab

Sketsa di samping menunjukkan titik pusat M adalah titik tengah garis PQ.
Koordinat titik tengah dari sebuah garis PQ dengan $P(x_P, y_P)$ dan $Q(x_Q, y_Q)$ adalah

$$\left(\frac{x_P + x_P}{2}, \frac{y_Q + y_Q}{2}\right)$$

Gambar 1.3

Sehingga koordinat titik M adalah :

$M\left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{(-4)+2}{2}\right) = M\left(\frac{-2}{2}, \frac{-2}{2}\right) = M(-1, -1)$

Panjang garis PQ = $\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (2 - (-4)^2}$

$= \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$

Jari – jari $r = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}\sqrt{52}$

Persamaan lingkaran dengan pusat M(–1, –1) dan jari – jari $r = \frac{1}{2}\sqrt{52}$ adalah

$(x - (-1))^2 + (y - (-1))^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{52}\right)^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{52}{4}$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 13$

Contoh 10.

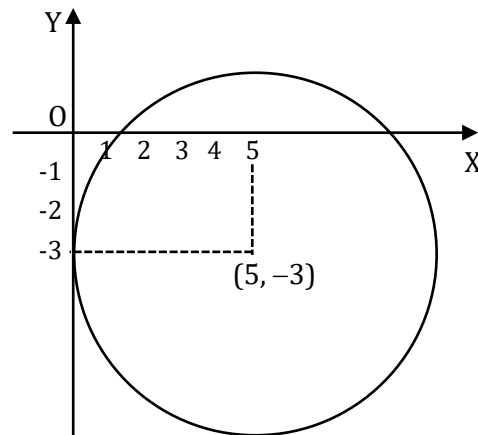
Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (5, –3) dan menyinggung sumbu Y.

Jawab

Berdasarkan gambar diketahui bahwa jari-jari lingkaran adalah 5.
Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat (5, –3) dan jari – jari r = 5 adalah

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - (-3))^2 = 5^2$

$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$

Gambar 1.4

Contoh 11.

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (2, 1) dan menyinggung garis $4x + 3y + 4 = 0$.

Jawab

Jari-jari lingkaran adalah jarak titik (2, 1) dengan garis $4x + 3y + 4 = 0$, sehingga

$$r = \frac{|4(2) + 3(1) + 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|\ 15\ |}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat (2, 1) dan jari-jari 3 adalah

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

$\Leftrightarrow\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

Contoh 12.

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik (0, 4), (1, 3), dan (1, −1).

Jawab

Misalkan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik tersebut adalah

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Kita akan menentukan nilai A, B, dan C sebagai berikut.

(0, 4) pada lingkaran, maka $0^2 + 4^2 + A(0) + B(4) + C = 0$

$4B + C = -16$ ……………………… (1)

(1, 3) pada lingkaran, maka $1^2 + 3^2 + A(1) + B(3) + C = 0$

$A + 3B + C = -10$ ……………………… (2)

(1, −1) pada lingkaran, maka $1^2 + (-1)^2 + A(1) + B(-1) + C = 0$

$A - B + C = -2$ ……………….. (3)

Eliminasi C pada persamaan (2) dan (3) diperoleh

$$\begin{array}{rl} A + 3B + C &= -10 \\ A - B + C &= -2 \\ \hline 4B &= -8 \\ B &= -2 \end{array} \ -$$

Substitusi $B = -2$ ke persamaan (1)
diperoleh $4(-2) + C = -16 \Rightarrow C = -16 + 8 \Rightarrow C = -8$

Substitusi $B = -2$ dan $C = -8$ ke persamaan (2)
diperoleh $A + 3(-2) + (-8) = -10 \Rightarrow A - 14 = -10 \Rightarrow A = 4$

Jadi, persamaan lingkaran yang melalui titik (0, 4), (1, 3), dan (1, −1) adalah

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$$

C. Rangkuman

- Persamaan lingkaran yang berpusat di titik O(0, 0) dan jari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$.
- Persamaan lingkaran yang berpusat di titik M(a, b) dan jari-jari r adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, disebut persamaan lingkaran bentuk baku.
- Persamaan umum lingkaran adalah $x^2 + y^2 + A\,x + By + C = 0$ dengan titik pusat $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ dan jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$.
- Jarak titik P(x_1, y_1) ke garis Ax + By + C = 0 dirumuskan oleh $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

D. Latihan Soal

1. Tentukan persamaan lingkaran yang:
   a. Berpusat di O(0, 0) dan berjari-jari $4\sqrt{5}$.
   b. Berpusat di M(–3, 6) dan berjari-jari $2\sqrt{7}$.
2. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan :
   a. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 20$
   b. $4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y - 3 = 0$
3. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan melalui titik A(–5, 12).
4. Diketahui sebuah lingkaran dengan pusat M(1, 6). Lingkaran tersebut melalui titik P(2, 3). Hitung jari-jari lingkaran, kemudian tentukan persamaannya.
5. Tentukan persamaan lingkaran yang diameternya merupakan ruas garis yang menghubungkan titik A(0, –2) dan B(4, 4).
6. Tentukan persamaan lingkaran yang sepusat dengan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ dan menyinggung garis $3x - 4y + 7 = 0$.
7. Diketahui lingkaran L_1 konsentris (sepusat) dengan lingkaran L_2 dan melalui titik (2, 8). Jika persamaan lingkaran L_2 adalah $x^2 + y^2 - x + 2y - 5 = 0$, maka tentukan persamaan lingkaran L_1.
8. Tentukan persamaan umum lingkaran yang melalui titik P(6, –2), Q(–3, –5), dan R(1, 3).

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

1. a. Persamaan lingkaran berpusat di O(0, 0) dan berjari-jari $4\sqrt{5}$ adalah
   $x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (4\sqrt{5})^2$
   $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 80$
   b. Persamaan lingkaran berpusat di M(–3, 6) dan berjari-jari $2\sqrt{7}$ adalah
   $x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (2\sqrt{7})^2$
   $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 28$
2. a. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 20$
   Pusat = $(1, -3)$
   Jari-jari $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
   b. $4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0$
   Pusat = $\left(-\frac{1}{2}(-2), -\frac{1}{2}(3)\right) = (1, -\frac{3}{2})$
   Jari-jari $r = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - (-\frac{3}{4})} = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1+3} = 2$
3. Alternatif Penyelesaian
   Persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan jari-jari r adalah
   $x^2 + y^2 = r^2$
   Lingkaran melalui titik A(–5, 12), sehingga $(-5)^2 + 12^2 = r^2$
   $25 + 144 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 169$
   Jadi, persamaan lingkaran tersebut adalah $x^2 + y^2 = 169$.
4. Alternatif Penyelesaian
   Jari-jari lingkaran adalah jarak titik pusat M(1, 6) ke titik P(2, 3) yang dilalui lingkaran.
   $r = MP = \sqrt{(2-1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$
   Persamaan lingkaran dengan pusat M(1, 6) dan jari-jari $r = \sqrt{10}$ adalah
   $(x-1)^2 + (y-6)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$
   $(x-1)^2 + (y-6)^2 = 10$
5. Alternatif Penyelesaian
   Titik pusat lingkaran merupakan titik tengah dari ruas garis AB, yaitu
   $P = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (2, 1)$
   Jari-jari lingkaran r = ½ AB
   $$r = \frac{1}{2}\sqrt{(4-0)^2 + \left(4-(-2)\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16+36} = \frac{1}{2}\sqrt{52} = \sqrt{13}$$
   Lingkaran dengan pusat P(2, 1) dan jari-jari $r = \sqrt{13}$ adalah
   $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{13})^2$
   $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$
   atau $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$

6. Alternatif Penyelesaian

Lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$, diperoleh A = –4 dan B = 6

Pusat lingkaran adalah P = $\left(-\frac{1}{2}(-4), -\frac{1}{2}(6)\right) = (2, -3)$

Jari-jari lingkaran r adalah jarak titik pusat P ke garis $3x - 4y + 7 = 0$, sehingga

$$r = \frac{|3(2) - 4(-3) + 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 + 12 + 7\ |}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{25}{5} = 5$$

Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat (2, –3) dan jari-jari 5 adalah

$(x - 2)^2 + \left(y - (-3)\right)^2 = 5^2$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$

atau $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

7. Alternatif Penyelesaian

lingkaran L_2: $x^2 + y^2 - x + 2y - 5 = 0$, berarti A = –1 dan B = 2.

Pusat lingkaran L_1 sama dengan pusat lingkaran L_2 (konsentris), sehingga

$P_1 = \left(-\frac{1}{2}(-1), -\frac{1}{2}(2)\right) = (\frac{1}{2}, -1)$

Persamaan lingkaran L_1 yang berpusat di titik $(\frac{1}{2}, -1)$

$(x - \frac{1}{2})^2 + \left(y - (-1)\right)^2 = r^2$

Lingkaran L_1 melalui titik (2, 8), sehingga

$(2 - \frac{1}{2})^2 + (8 + 1)^2 = r^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9^2 = r^2$

$\Leftrightarrow \frac{9}{4} + 81 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{333}{4}$

Jadi, persamaan lingkaran L_1 adalah

$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 = \frac{333}{4}$ atau $x^2 + y^2 - x + 2y - 82 = 0$

8. Alternatif Penyelesaian

Misalkan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik tersebut adalah

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Kita akan menentukan nilai A, B, dan C sebagai berikut.

P(6, –2) pada lingkaran, maka $6^2 + (-2)^2 + A(6) + B(-2) + C = 0$

$6A - 2B + C = -40$ ……………………… (1)

Q(–3, –5) pada lingkaran, maka $(-3)^2 + (-5)^2 + A(-3) + B(-5) + C = 0$

$-3A - 5B + C = -34$ ……………………… (2)

R(1, 3) pada lingkaran, maka $1^2 + 3^2 + A(1) + B(3) + C = 0$

$A + 3B + C = -10$ ……………………… (3)

Eliminasi C pada persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$
\begin{array}{rl}
6A - 2B + C = & -40 \\
-3A - 5B + C = & -34 \quad - \\
\hline
9A + 3B \quad = & -6 \\
3A + B \quad = & -2 \quad \text{atau} \quad B = -2 - 3A \; \ldots\ldots\ldots\ldots (4)
\end{array}
$$

Eliminasi C pada persamaan (2) dan (3) diperoleh

$$
\begin{array}{rl}
-3A - 5B + C = & -34 \\
A + 3B + C = & -10 \quad - \\
\hline
-4A - 8B \quad = & -24 \\
A + 2B \quad = & 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)
\end{array}
$$

Substitusi $B = -2 - 3A$ ke persamaan (5), diperoleh

$A + 2(-2 - 3A) = 6 \Leftrightarrow A - 4 - 6A = 6 \Leftrightarrow -5A = 10 \Leftrightarrow A = -2$

Substitusi $A = -2$ ke persamaan (4), diperoleh
$B = -2 - 3(-2) = -2 + 6 = 4$

Substitusi $A = -2$ dan $B = 4$ ke persamaan (3)
diperoleh $(-2) + 3(4) + C = -10 \Rightarrow -2 + 12 + C = -10 \Rightarrow C = -10 - 10 = -20$

Jadi, persamaan lingkaran yang melalui titik P(6, –2), Q(–3, –5), dan R(1, 3) adalah

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda dapat menyusun persamaan lingkaran yang berpusat di titik O(0, 0) dan jari-jari r?	◯	◯
2	Apakah Anda dapat menyusun persamaan lingkaran yang berpusat di titik (a, b) dan jari-jari r?	◯	◯
3	Apakah Anda dapat menyusun persamaan lingkaran lingkaran dalam bentuk umum?	◯	◯
4	Apakah Anda dapat menentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran jika persamaannya diketahui?	◯	◯
5	Apakah Anda dapat menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi kriteria tertentu?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
KEDUDUKAN TITIK DAN GARIS TERHADAP LINGKARAN

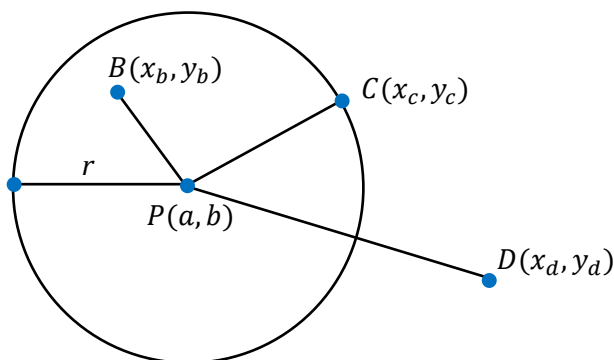
A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan kalian dapat menentukan kedudukan suatu titik dan garis terhadap lingkaran, serta menganalisis secara analitik kedudukan suatu titik dan garis terhadap lingkaran.

B. Uraian Materi

1. Kedudukan Titik Terhadap Lingkaran

Jika titik P(x_1 , y_1) sembarang dan L adalah lingkaran dengan jari-jari r, maka ada tiga posisi titik P terhadap lingkaran L, yaitu P terletak pada lingkaran, P di dalam lingkaran, dan P di luar lingkaran.

Perhatikan gambar.

Gambar 2.1. Kedudukan titik terhadap lingkaran

Perhatikan ilustrasi di atas. Titik B terletak di dalam lingkaran, C pada lingkaran, dan D di luar lingkaran. Kedudukan sebuah titik terhadap lingkaran dapat kita tentukan dengan cara membandingkan jarak titik tersebut ke pusat lingkaran dengan panjang jari-jari lingkaran.

PB < r	$(x_b - a)^2 + (y_b - b)^2 < r^2$	Titik B di dalam lingkaran
PC = r	$(x_c - a)^2 + (y_c - b)^2 = r^2$	Titik C pada lingkaran
PD > r	$(x_d - a)^2 + (y_d - b)^2 > r^2$	Titik D di luar lingkaran

Dengan menguraikan persamaan di atas, dalam persamaan umum diperoleh hubungan

PB < r	$x_b^2 + y_b^2 + Ax_b + By_b + C < r^2$	Titik B di dalam lingkaran
PC = r	$x_c^2 + y_c^2 + Ax_c + By_c + C = r^2$	Titik C pada lingkaran
PD > r	$x_d^2 + y_d^2 + Ax_d + By_d + C > r^2$	Titik D di luar lingkaran

Contoh 1.

Tentukan kedudukan titik A(–3, 5), B(7, 6), dan C(1, –2) terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 34$.

Jawab

Kedudukan titik A, B, dan C terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 34$ dapat ditentukan dengan cara mensubstitusikan titik A, B, dan C ke ruas kiri persamaan lingkaran ($x^2 + y^2$), kemudian membandingkan dengan nilai $r^2 = 34$ (di ruas kanan).

A(–3, 5) = A(x_a, y_a) sehingga $x_a = -3$ dan $y_a = 5$

$$x_a^2 + y_a^2 = (-3)^2 + 5^2$$

$$x_a^2 + y_a^2 = 9 + 25 = 34 = r^2$$

Berarti titik A(–3, 5) terletak pada lingkaran.

B(7, 6) = B(x_b, y_b) sehingga $x_b = 7$ dan $y_b = 6$

$$x_b^2 + y_b^2 = 7^2 + 6^2$$

$$x_b^2 + y_b^2 = 49 + 36 = 85 > r^2 = 34$$

Berarti titik B(7, 6) terletak di luar lingkaran.

C(1, –2) = C(x_c, y_c) sehingga $x_c = 1$ dan $y_c = -2$

$$x_c^2 + y_c^2 = 1^2 + (-2)^2$$

$$x_c^2 + y_c^2 = 1 + 4 = 5 < r^2 = 34$$

Berarti titik C(1, –2) terletak di dalam lingkaran.

Contoh 2.

Tentukan kedudukan titik A(4, 6), B(6, 2), dan C(1, 1) terhadap lingkaran $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

Jawab

Substitusi titik A, B, dan C ke ruas kiri $(x - 3)^2 + (y + 2)^2$ kemudian bandingkan dengan $r^2 = 25$.

A(4, 6) = A(x_a, y_a) sehingga $x_a = 4$ dan $y_a = 6$

$$(x_a - 3)^2 + (y_a + 2)^2 = (4 - 3)^2 + (6 + 2)^2$$
$$(x_a - 3)^2 + (y_a + 2)^2 = 1^2 + 8^2 = 1 + 64 = 65 > r^2$$

Berarti titik A(4, 6) terletak di luar lingkaran.

B(6, 2) = B(x_b, y_b) sehingga $x_b = 6$ dan $y_b = 2$

$$(x_b - 3)^2 + (y_b + 2)^2 = (6 - 3)^2 + (2 + 2)^2$$
$$(x_b - 3)^2 + (y_b + 2)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = r^2$$

Berarti titik B(6, 2) terletak pada lingkaran.

C(1, 1) = C(x_c, y_c) sehingga $x_c = 1$ dan $y_c = 1$

$$(x_c - 3)^2 + (y_c + 2)^2 = (1 - 3)^2 + (1 + 2)^2$$
$$(x_c - 3)^2 + (y_c + 2)^2 = (-2)^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 < r^2$$

Berarti titik C(1, 1) terletak di dalam lingkaran.

Contoh 3.

Tentukan kedudukan titik P(2, 1), Q(6, 6), dan R(7, 2) terhadap lingkaran
$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

Jawab

Substitusi titik P, Q, dan R ke ruas kiri $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12$ kemudian bandingkan dengan 0 di ruas kanan.

P(2, 1) = P(x_p, y_p) sehingga x_p = 2 dan y_p = 1

$$x_p^2 + y_p^2 - 4x_p - 6y_p - 12 = 2^2 + 1^2 - 4(2) - 6(1) - 12$$
$$x_p^2 + y_p^2 - 4x_p - 6y_p - 12 = 4 + 1 - 8 - 6 - 12 = -21 < 0$$

Berarti titik P(2, 1) terletak di dalam lingkaran.

Q(6, 6) = Q(x_q, y_q) sehingga x_q = 6 dan y_q = 6

$$x_q^2 + y_q^2 - 4x_q - 6y_q - 12 = 6^2 + 6^2 - 4(6) - 6(6) - 12$$
$$x_p^2 + y_p^2 - 4x_p - 6y_p - 12 = 36 + 36 - 24 - 36 - 12 = 0$$

Berarti titik Q(6, 6) terletak pada lingkaran.

R(7, 2) = R(x_r, y_r) sehingga x_r = 7 dan y_r = 2

$$x_r^2 + y_r^2 - 4x_r - 6y_r - 12 = 7^2 + 2^2 - 4(7) - 6(2) - 12$$
$$x_p^2 + y_p^2 - 4x_p - 6y_p - 12 = 49 + 4 - 28 - 12 - 12 = 1 > 0$$

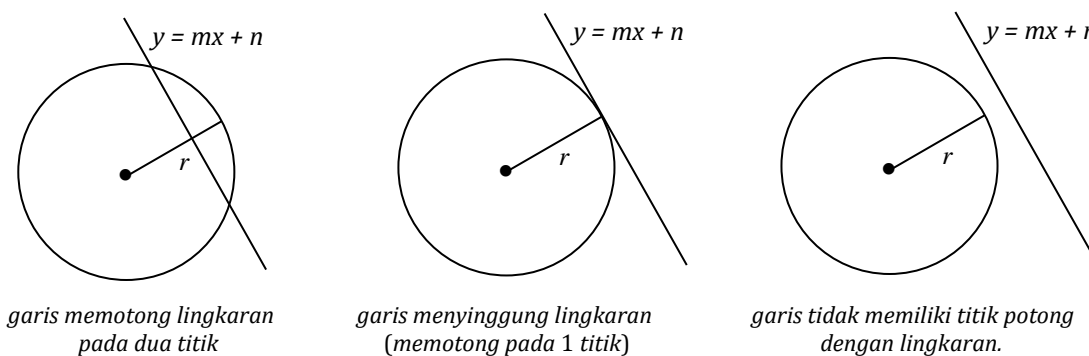
Berarti titik R(7, 2) terletak di luar lingkaran.

2. Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran

Jika garis $y = mx + n$ sembarang dan L adalah lingkaran dengan jari-jari r, maka ada tiga kedudukan garis terhadap lingkaran L sebagaimana ditunjukkan pada gambar berikut.

garis memotong lingkaran pada dua titik

garis menyinggung lingkaran (memotong pada 1 titik)

garis tidak memiliki titik potong dengan lingkaran.

Gambar 2.2. Kedudukan garis terhadap lingkaran

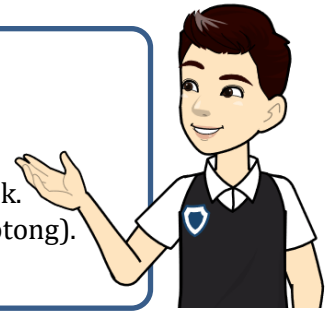
Langkah-langkah menentukan kedudukan garis $y = mx + n$ terhadap lingkaran L sebagai berikut:

a. Substitusi y dari persamaan garis $y = mx + n$ ke persamaan lingkaran L.
b. Susun persamaan kuadrat sekutu dalam variabel x (bentuk $ax^2 + bx + c = 0$).
c. Hitung nilai diskriminan persamaan kuadrat sekutu dengan rumus $D = b^2 - 4ac$.
d. Periksa tanda diskriminan D dengan kriteria:

- Jika D > 0 maka garis memotong lingkaran pada dua titik.
- Jika D = 0 maka garis menyinggung lingkaran (ada satu titik potong)
- Jika D < 0 maka garis tidak memiliki titik potong dengan lingkaran.

Kedudukan Garis terhadap Lingkaran

Kedudukan garis terhadap lingkaran ditentukan oleh nilai diskriminan persamaan kuadrat sekutu antara garis dan lingkaran.

- Jika D > 0, maka garis memotong lingkaran pada dua titik.
- Jika D = 0, maka garis menyinggung lingkaran (1 titik potong).
- Jika D < 0, maka garis tidak memotong lingkaran.

Contoh 4.

Tentukan kedudukan garis $x + y - 2 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.

Jawab

Garis $x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -x + 2$
Substitusikan $y = -x + 2$ ke persamaan lingkaran, sehingga diperoleh:

$x^2 + (-x + 2)^2 - 4x + 2(-x + 2) - 20 = 0$
$\Leftrightarrow \quad x^2 + x^2 - 4x + 4 - 4x - 2x + 4 - 20 = 0$
$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 10x - 12 = 0$
$\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x - 6 = 0$
Diperoleh nilai $a = 1$, $b = -5$, dan $c = -6$.

Dari persamaan kuadrat sekutu tersebut di atas diperoleh nilai diskriminan

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-6) = 25 + 24 = 49 > 0$

Karena nilai D > 0, maka garis $x + y - 2 = 0$ memotong lingkaran pada dua titik.

Untuk menentukan titik potong antara garis dan lingkaran, maka kita memfaktorkan persamaan kuadrat sekutu sebagai berikut.

$x^2 - 5x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1)(x - 6) = 0$
$\Leftrightarrow \quad x + 1 = 0$ atau $x - 6 = 0$
$\Leftrightarrow \quad x = -1$ atau $x = 6$

Selanjutnya, substitusi nilai $x = -1$ dan $x = 6$ ke persamaan garis $y = -x + 2$.
untuk $x = -1 \quad \Rightarrow y = -x + 2 = -(-1) + 2 = 3$
untuk $x = 6 \quad \Rightarrow y = -x + 2 = -(6) + 2 = -4$

sehingga diperoleh titik potong antara garis dan lingkaran pada titik (−1, 3) dan titik (6, −4).

Contoh 5.

Tentukan kedudukan garis $3x + y + 10 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 20 = 0$.

Jawab

Garis $3x + y + 10 = 0 \Rightarrow y = -3x - 10$
Substitusikan $y = -3x - 10$ ke persamaan lingkaran, sehingga diperoleh:

$x^2 + (-3x - 10)^2 - 8x + 4(-3x - 10) - 20 = 0$
$\Leftrightarrow \quad x^2 + 9x^2 + 60x + 100 - 8x - 12x - 40 - 20 = 0$
$\Leftrightarrow \quad 10x^2 + 40x + 40 = 0$
$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = 0$
diperoleh nilai $a = 1$, $b = 4$, dan $c = 4$.

Dari persamaan kuadrat sekutu tersebut di atas diperoleh nilai diskriminan
$D = b^2 - 4ac$
$= (4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$

Karena nilai $D = 0$, maka garis $3x + y + 10 = 0$ memotong lingkaran di satu titik, atau dikatakan garis menyinggung lingkaran.

Titik singgung dapat diperoleh dari penyelesaian persamaan kuadrat sekutu.

$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

selanjutnya nilai $x = -2$ disubstitusikan ke persamaan garis, diperoleh
$y = -3x - 10 \Leftrightarrow y = -3(-2) - 10 = -4$

sehingga diperoleh titik singgung garis dan lingkaran pada titik (–2, –4).

Contoh 6.

Tentukan kedudukan garis $x + y = 4$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 3$

Jawab

Garis $x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$
Substitusikan $y = 4 - x$ ke persamaan lingkaran, diperoleh :
$x^2 + y^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 + (4 - x)^2 = 3$
$\Leftrightarrow x^2 + 16 - 8x + x^2 = 3$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 13 = 0$
diperoleh nilai $a = 2$, $b = -8$, $c = 13$.

Dari persamaan kuadrat sekutu tersebut di atas diperoleh nilai diskriminan

$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(2)(13) = 64 - 104 = -40 < 0$

Karena nilai $D < 0$, berarti garis $x + y = 4$ tidak memiliki titik potong dengan lingkaran (garis berada di luar lingkaran).

Contoh 7.

Tentukan nilai m agar garis $y = mx + 3$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 9$.

Jawab

Substitusikan $y = mx + 3$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$, diperoleh :
$x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + (mx + 3)^2 = 9$
$\Leftrightarrow x^2 + m^2x^2 + 6mx + 9 = 9$
$\Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + 6mx + 9 - 9 = 0$
$\Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + 6mx = 0$

diperoleh nilai $a = (1 + m^2)$, $b = 6m$, $c = 0$.

Dari persamaan kuadrat sekutu tersebut di atas diperoleh nilai diskriminan

$D = b^2 - 4ac = (6m)^2 - 4(1 + m^2)(0) = 36m^2 - 0 = 36m^2$

Diketahui garis $y = mx + 3$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 9$, berarti nilai diskriminan $D = 0$
$\Leftrightarrow 36m^2 = 0$
$\Leftrightarrow m = 0$

Jadi, garis $y = mx + 3$ akan menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ jika nilai $m = 0$ atau persamaan garis adalah $y = 3$.

C. Rangkuman

- Kedudukan titik $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

  $P(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 = r^2$

  $P(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 > r^2$

  $P(x_1, y_1)$ terletak di dalam lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 < r^2$

- Kedudukan titik $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

  $P(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$

  $P(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2$

  $P(x_1, y_1)$ terletak di dalam lingkaran jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$

- Kedudukan titik $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

  $P(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$

  $P(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C > 0$

  $P(x_1, y_1)$ terletak di dalam lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C < 0$

- Kedudukan garis terhadap lingkaran ditentukan oleh nilai diskriminan persamaan kuadrat sekutu antara garis dan lingkaran.

  Jika D > 0, maka garis memotong lingkaran pada dua titik.

  Jika D = 0, maka garis menyinggung lingkaran (1 titik potong).

  Jika D < 0, maka garis tidak memotong lingkaran.

D. Latihan Soal

1. Tentukan kedudukan titik-titik berikut terhadap lingkaran berpusat di titik (1, 3) dengan jari-jari 5.
   a. A(7, 5)
   b. B(6, 3)
2. Tentukan nilai n jika titik A(−3, n) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$.
3. Tentukan kedudukan titik-titik berikut terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 36 = 0$.
   a. P(1, 2)
   b. Q(4, −2)
4. Jika titik (1, 3) terletak pada lingkaran $3x^2 + 3y^2 + ax - 6y - 9 = 0$, tentukan:
   a. nilai a
   b. pusat dan jari-jari lingkaran.
5. Tentukan kedudukan garis $y = x + 6$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$
6. Tentukan kedudukan garis $y - x + 2 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 20 = 0$.
7. Tentukan kedudukan garis $y = 2x + 8$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$. Kemudian tentukan titik potongnya jika ada.
8. Tentukan nilai c sehingga garis $y = -2x + c$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - y + 3 = 0$.

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

1. Alternatif Penyelesaian
   Persamaan lingkaran berpusat di titik (1, 3) dengan jari-jari 5 adalah
   $(x-1)^2+(y-3)^2=5^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=25$

   a. $A(7,5) \Rightarrow (7-1)^2+(5-3)^2=6^2+2^2=36+4=40>25$
      berarti titik A terletak di luar lingkaran.

   b. $B(6,3) \Rightarrow (6-1)^2+(3-3)^2=5^2+0^2=25+0=25$
      berarti titik B terletak pada lingkaran.

2. Alternatif Penyelesaian

   Titk A(–3, n) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$, berarti

   $(-3)^2+n^2=13 \Leftrightarrow 9+n^2=13$

   $\Leftrightarrow n^2=13-9 \quad \Leftrightarrow n^2=4 \Leftrightarrow n=\pm 2$

3. Alternatif Penyelesaian
   a. $P(1,2) \Rightarrow 1^2+2^2-8(1)+12(2)+36=1+4-8+24+36=57>0$
      berarti titik P(1, 2) terletak di luar lingkaran.

   b. $Q(4,-2) \Rightarrow 4^2+(-2)^2-8(4)+12(-2)+36=16+4-32-24+36=0$
      berarti titik Q(4, –2) terletak pada lingkaran.

4. Alternatif Penyelesaian
   a. (1, 3) terletak pada lingkaran $3x^2 + 3y^2 + ax - 6y - 9 = 0$, berarti
      $3(1)^2 + 3(3)^2 + a(1) - 6(3) - 9 = 0$
      $\Leftrightarrow 3 + 27 + a - 18 - 9 = 0$
      $\Leftrightarrow 3 + a = 0$ atau $a = -3$

   a. Persamaan lingkaran $3x^2 + 3y^2 - 3x - 6y - 9 = 0$, diperoleh A = –3 dan B = –6

      Pusat = $\left(-\frac{1}{2}(-3), -\frac{1}{2}(-6)\right) = (\frac{3}{2}, 3)$

      Jari-jari $r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2-(-9)} = \sqrt{\frac{9}{4}+9+9} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$

5. Alternatif Penyelesaian

   Substitusi $y = x + 6$ ke lingkaran $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$, diperoleh

   $x^2 + (x + 6)^2 - 8x - 4(x + 6) - 4 = 0$

   $\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 12x + 36 - 8x - 4x - 24 - 4 = 0$

   $\Leftrightarrow 2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 0$

   $a = 1$, $b = 0$, dan $c = 4$

   Diskriminan persamaan kuadrat sekutu adalah

   $D = 0^2 - 4(1)(4) = -16 < 0$

   Karena D < 0, maka garis $y = x + 6$ tidak mempunyai titik potong dengan lingkaran $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$.

6. Alternatif Penyelesaian

   Substitusi $y - x + 2 = 0 \Leftrightarrow y = x - 2$ ke lingkaran $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 20 = 0$, diperoleh

   $x^2 + (x - 2)^2 - 12x + 8(x - 2) + 20 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2 - 4x + 4 - 12x + 8x - 16 + 20 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$a = 1$, $b = -4$, dan $c = 4$

Diskriminan persamaan kuadrat sekutu adalah

$D = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$

Karena D = 0, maka garis $y - x + 2 = 0$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 20 = 0$.

7. Alternatif Penyelesaian

Substitusi $y = 2x + 8$ ke lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$, diperoleh

$x^2 + (2x + 8)^2 + 4x + 2(2x + 8) - 20 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 + 32x + 64 + 4x + 4x + 16 - 20 = 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 40x + 60 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 + 8x + 12 = 0$

$a = 1$, $b = 8$, dan $c = 12$

Diskriminan persamaan kuadrat sekutu adalah

$D = 8^2 - 4(1)(12) = 64 - 48 = 16 > 0$

Karena D > 0, maka garis $y = 2x + 8$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$ pada dua titik.

Persamaan kuadrat sekutu adalah $x^2 + 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 6) = 0$

$x = -2$ atau $x = -6$

Untuk $x = -2$, maka $y = 2x + 8 = 2(-2) + 8 = 4$, diperoleh titik $(-2, 4)$

Untuk $x = -6$, maka $y = 2x + 8 = 2(-6) + 8 = -4$, diperoleh titik $(-2, -4)$

Jadi, garis $y = 2x + 8$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$ memotong lingkaran pada titik $(-2, 4)$ dan $(-2, -4)$.

8. Alternatif Penyelesaian

Substitusi $y = -2x + c$ ke lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - y + 3 = 0$, diperoleh

$x^2 + (-2x + c)^2 - 4x - (-2x + c) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 - 4cx + c^2 - 4x + 2x - c + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 - (4c + 2)x + (c^2 - c + 3) = 0$

$A = 5$, $B = -(4c + 2)$, dan $C = (c^2 - c + 3)$

Diskriminan persamaan kuadrat sekutu adalah

$D = (-(4c + 2))^2 - 4(5)(c^2 - c + 3)$

$= 16c^2 + 16c + 4 - 20c^2 + 20c - 60$

$= -4c^2 + 36c - 56$

Garis menyinggung lingkaran, berarti nilai D = 0, sehingga diperoleh:

$-4c^2 + 36c - 56 = 0 \Leftrightarrow c^2 - 9c + 14 = 0 \Leftrightarrow (c - 2)(c - 7) = 0$

$c - 2 = 0$ atau $c - 7 = 0$

$c = 2$ atau $c = 7$.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda tahu yang dimaksud kedudukan suatu titik terhadap lingkaran?	○	○
2	Apakah Anda tahu yang dimaksud kedudukan suatu garis terhadap lingkaran?	○	○
3	Apakah Anda dapat menentukan kedudukan suatu titik terhadap lingkaran tertentu?	○	○
4	Apakah Anda dapat menentukan kedudukan suatu garis terhadap lingkaran tertentu?	○	○
5	Apakah Anda dapat menentukan unsur yang belum diketahui dari suatu garis jika garis menyinggung lingkaran?	○	○
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
PERSAMAAN GARIS SINGGUNG LINGKARAN

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan kalian dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui suatu titik pada lingkaran, persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien m, dan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik di luar lingkaran.

B. Uraian Materi

1. Persamaan Garis Singgung Melalui Sebuah Titik pada Lingkaran

Misalkan titik P(x_1, y_1) terletak pada lingkaran dengan pusat O(0, 0) dan berjari-jari r. Kemudian dibuat suatu garis singgung yang melalui titik P seperti pada gambar.

Gambar 3.1. Garis singgung lingkaran

Persamaan umum garis singgung tersebut adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$. Gradien garis yang menghubungkan titik O(0, 0) dan titik P(x_1, y_1) adalah

$$m_{OP} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{y_1}{x_1}$$

Garis singgung lingkaran dan garis OP saling tegak lurus sehingga

$$m \times m_{OP} = -1$$

$$m = \frac{-1}{m_{OP}} = \frac{-1}{\frac{y_1}{x_1}} = \frac{-x_1}{y_1}$$

$m = \frac{-x_1}{y_1}$ disubstitusikan ke persamaan umum garis singgung $y - y_1 = m(x - x_1)$, sehingga diperoleh :

$$(y - y_1) = \frac{-x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$y_1(y - y_1) = -x_1(x - x_1)$$

$$y_1 y - {y_1}^2 = -x_1 x + {x_1}^2$$

$$x_1 x + y_1 y = {x_1}^2 + {y_1}^2$$

$$\boldsymbol{x_1 x + y_1 y = r^2}$$

Jadi, persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah

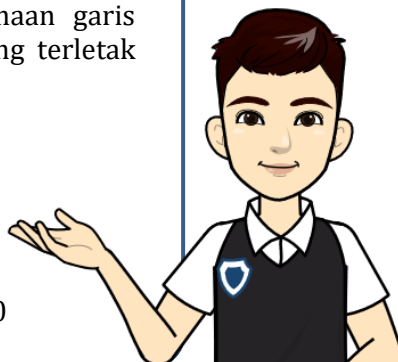
$$x_1 x + y_1 y = r^2.$$

Dengan cara penurunan yang sama, persamaan garis singgung melalui titik singgung $P(x_1, y_1)$ yang terletak pada lingkaran dengan persamaan:

a. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ adalah

$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

b. $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ adalah

$x_1x+y_1y+\frac{A}{2}(x_1+x)+\frac{B}{2}(y_1+y)+C=0$

Contoh 1.

Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $P(8, -6)$ pada lingkaran $x^2+y^2=100$.

Jawab

Kita periksa dahulu apakah titik $P(8, -6)$ terletak pada lingkaran $x^2+y^2=100$.

$P(8,-6) \quad \Rightarrow \quad 8^2 + (-6)^2 \ ?\ 100$

$\qquad\qquad\qquad 64 + 36 = 100$ (benar)

Berarti titik $P(8, -6)$ terletak pada lingkaran dan merupakan titik singgung.

Persamaan garis singgung melalui titik $P(8, -6)$ pada lingkaran $x^2+y^2=100$ dapat ditentukan dengan rumus

$x_1x+y_1y=100$ dengan $x_1 = 8$ dan $y_1 = -6$

$8x+(-6)y=100$

$8x-6y=100$

$4x-3y=50$ atau $4x-3y-50=0$

Jadi, persamaan garis singgung yang melalui titik $P(8, -6)$ pada lingkaran $x^2+y^2=100$ adalah $4x-3y-50=0$.

Contoh 2.

Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $Q(10, 9)$ pada lingkaran $(x+2)^2+(y-4)^2=169$.

Jawab

Kita periksa dahulu apakah titik $Q(10, 9)$ terletak pada lingkaran $(x+2)^2+(y-4)^2=169$.

$Q(10,9) \quad \Rightarrow \quad (10+2)^2 + (9-4)^2 \ ?\ 169$

$\qquad\qquad\qquad 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$ (benar)

Berarti titik $Q(10, 9)$ terletak pada lingkaran dan merupakan titik singgung.

Persamaan garis singgung melalui titik $Q(10, 9)$ pada lingkaran $(x+2)^2+(y-4)^2=169$ dapat ditentukan dengan rumus

$(x_1+2)(x+2)+(y_1-4)(y-4)=169$ dengan $x_1 = 10$ dan $y_1 = 9$

$(10+2)(x+2)+(9-4)(y-4)=169$

$12(x+2)+5(y-4)=169$

$12x+24+5y-20=169 \quad \Leftrightarrow \quad 12x+5y-165=0$

Jadi, persamaan garis singgung yang melalui titik $Q(10, 9)$ pada lingkaran $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 169$ adalah $12x + 5y - 165 = 0$.

Contoh 3.

Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $R(7, -2)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 27 = 0$.

Jawab

Kita periksa dahulu apakah titik $R(7, -2)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 27 = 0$.

$R(7, -2) \Rightarrow 7^2 + (-2)^2 - 8(7) + 12(-2) + 27 \ ? \ 0$

$49 + 4 - 56 - 24 + 27 \ ? \ 0$

$0 = 0$ (benar)

Berarti titik $R(7, -2)$ terletak pada lingkaran dan merupakan titik singgung.

Persamaan garis singgung melalui titik $R(7, -2)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 27 = 0$ dapat ditentukan dengan rumus

$$x_1x + y_1y - \frac{8}{2}(x_1 + x) + \frac{12}{2}(y_1 + y) + 27 = 0 \qquad \text{dengan } x_1 = 7 \text{ dan } y_1 = -2$$

$$7x + (-2)y - \frac{8}{2}(7 + x) + \frac{12}{2}(-2 + y) + 27 = 0$$

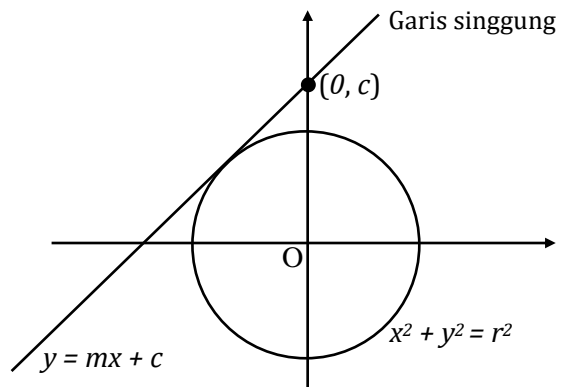
$$7x - 2y - 4(7 + x) + 6(-2 + y) + 27 = 0$$

$$7x - 2y - 28 - 4x - 12 + 6y + 27 = 0$$

$$3x + 4y - 13 = 0$$

Jadi, persamaan garis singgung yang melalui titik $R(7, -2)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 27 = 0$ adalah $3x + 4y - 13 = 0$.

2. Persamaan Garis Singgung Yang Gradiennya Diketahui

Sebuah garis yang mempunyai gradien m dan melalui titik $(0, c)$ dinyatakan dengan $y = mx + c$. Jika garis tersebut menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, maka persamaan garis singgung lingkaran tersebut dapat diperoleh dengan langkah-langkah berikut.

Gambar 3.2. Garis singgung lingkaran gradien m

Substitusikan $y = mx + c$ ke dalam persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, sehingga diperoleh

$$x^2 + (mx + c)^2 = r^2$$

$$x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 = r^2$$

$$x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 - r^2 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - r^2 = 0$$

Garis menyinggung lingkaran (memotong lingkaran pada satu titik) jika nilai diskriminan persamaan kuadrat di atas sama dengan 0 ($D = b^2 - 4ac = 0$)

$$D = 0$$
$$(2mc)^2 - 4(1 + m^2)(c^2 - r^2) = 0$$
$$4m^2c^2 - 4(c^2 + m^2c^2 - r^2 - m^2r^2) = 0$$
$$4m^2c^2 - 4c^2 - 4m^2c^2 + 4r^2 + 4m^2r^2 = 0$$
$$-4c^2 + 4r^2 + 4m^2r^2 = 0$$
$$4c^2 = 4r^2 + 4m^2r^2$$
$$c^2 = r^2 + m^2r^2$$
$$c^2 = r^2(1 + m^2)$$
$$c = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ yang mempunyai gradien m adalah

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

Dengan cara yang sama, persamaan garis singgung dengan gradien m pada lingkaran dengan persamaan baku $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dirumuskan oleh

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

Untuk persamaan lingkaran dalam bentuk umum $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, maka terlebih dahulu diubah ke dalam bentuk baku $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ atau langsung menentukan pusat lingkaran $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ dan jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$, kemudian menentukan persamaan garis singgungnya dengan rumus di atas.

Hubungan Antara Gradien 2 Garis

Misalkan m_1 adalah gradien garis g_1 dan m_2 adalah gradien garis g_2.

- Jika garis g_1 ***sejajar*** dengan garis g_2, maka berlaku $\boldsymbol{m_1 = m_2}$
- Jika garis g_1 ***tegak lurus*** garis g_2, maka berlaku $\boldsymbol{m_1 \times m_2 = -1}$ atau $m_1 = \frac{-1}{m_2}$

Contoh 4.

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ yang bergradien 2.

Jawab

Diketahui $r = 6$ dan $m = 2$, maka persamaan garis singgungnya adalah

$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

$\Leftrightarrow\ y = 2x \pm 6\sqrt{2^2 + 1}$

$\Leftrightarrow \; y = 2x \pm 6\sqrt{5}$

Jadi, persamaan garis lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ yang bergradien 2 adalah

$y = 2x + 6\sqrt{5}$ dan $y = 2x - 6\sqrt{5}$.

Contoh 5.

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 169$ yang sejajar dengan garis $y = 3x + 5$.

Jawab

Garis $y = 3x + 5$ mempunyai gradien $m_1 = 3$. Garis singgung lingkaran **sejajar** garis $y = 3x + 5$, berarti gradien garis singgung adalah $m = 3$. (sejajar, maka $m = m_1$)

Jari-jari lingkaran $r = \sqrt{169} = 13$, maka persamaan garis singgungnya adalah

$$(y-b) = m(x-a) \pm r\sqrt{m^2+1}$$

$$(y-4) = 3(x+2) \pm 13\sqrt{3^2+1}$$

$$y = 3x + 6 + 4 \pm 13\sqrt{10}$$

$$y = 3x + 10 \pm 13\sqrt{10}$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 169$ yang sejajar dengan garis $y = 3x + 5$ adalah $y = 3x + 10 + 13\sqrt{10}$ dan $y = 3x + 10 - 13\sqrt{10}$.

Contoh 6.

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ yang tegak lurus dengan garis $3x + 4y - 8 = 0$

Jawab

Garis $3x + 4y - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \; 4y = -3x + 8$

$\Leftrightarrow \; y = -\frac{3}{4}x + \frac{8}{4}$, berarti gradien $m_1 = -\frac{3}{4}$.

Garis singgung lingkaran tegak lurus garis $3x + 4y - 8 = 0$, sehingga berlaku :

$$m = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{\frac{-3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Pusat lingkaran $\left(-\frac{1}{2}A,\; -\frac{1}{2}B\right) = \left(-\frac{1}{2}(-6),\; -\frac{1}{2}(8)\right) = (3, -4)$

Jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} = \sqrt{\frac{1}{4}(-6)^2 + \frac{1}{4}(8)^2 - 0} = \sqrt{9+16} = 5$

maka persamaan garis singgungnya adalah

$$(y-b) = m(x-a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$(y+4) = \frac{4}{3}(x-3) \pm 5\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1}$$

$$(y+4) = \frac{4}{3}(x-3) \pm 5\sqrt{\frac{16}{9} + \frac{9}{9}}$$

$$(y+4) = \frac{4}{3}(x-3) \pm 5\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$3(y+4) = 4(x-3) \pm 25$$

$$3y + 12 = 4x - 12 \pm 25$$

$$3y = 4x - 24 \pm 25$$
$$4x - 3y - 24 \pm 25 = 0$$

Jadi, persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ yang tegak lurus dengan garis $3x + 4y - 8 = 0$ adalah $4x - 3y + 1 = 0$ dan $4x - 3y - 49 = 0$.

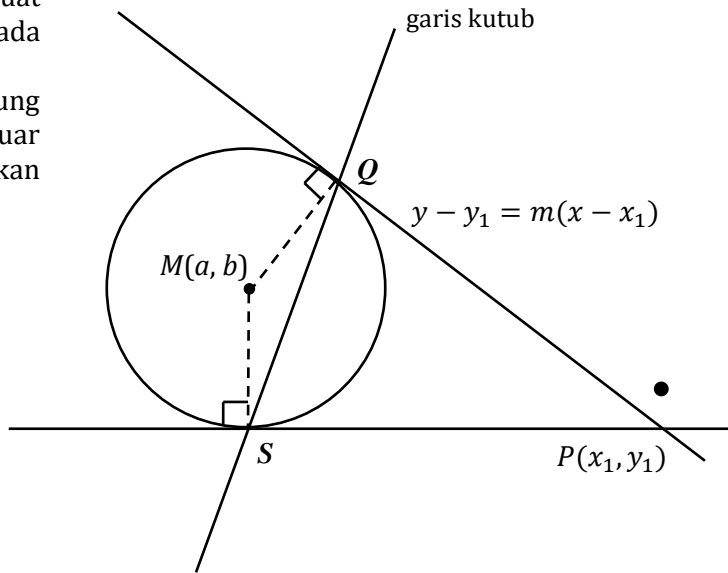
3. Persamaan Garis Singgung Melalui Suatu Titik Di Luar Lingkaran

Dari sebuah titik $P(x_1, y_1)$ di luar lingkaran selalu dapat dibuat dua buah garis singgung pada lingkaran (lihat gambar).

Persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1, y_1)$ di luar lingkaran dapat ditentukan dengan 3 cara :

a. Menggunakan diskriminan persamaan kuadrat sekutu.

b. Menggunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradien diketahui.

c. Mencari titik singgung dengan cara menentukan persamaan garis kutub (polar) dari titik P dan memotongkannya dengan lingkaran.

Gambar 3.3. Garis singgung lingkaran melalui titik di luar lingkaran

Contoh

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ yang melalui titik $P(8, 0)$ di luar lingkaran.

Jawab

a. Dengan menggunakan diskriminan persamaan kuadrat sekutu

Titik $P(8, 0)$ terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 36$, karena $8^2 + (0)^2 = 64 > 36$.
Persamaan garis singgung melalui titik $P(8, 0)$ dimisalkan

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = m(x - 8) \Leftrightarrow y = mx - 8m \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

Persamaan $y = mx - 8m$ disubstitusikan ke dalam persamaan lingkaran, diperoleh persamaan kuadrat sekutu,

$$x^2 + y^2 = 36$$
$$x^2 + (mx - 8m)^2 = 36$$
$$x^2 + m^2x^2 - 16m^2x + 64m^2 = 36$$
$$(1 + m^2)x^2 - 16m^2x + (64m^2 - 36) = 0$$

diperoleh $a = (1 + m^2)$, $b = -16m^2$, dan $c = 64m^2 - 36$

Agar garis menyinggung lingkaran, maka diskriminan persamaan kuadrat sekutu sama dengan nol ($D = 0$)

$$D = b^2 - 4ac$$
$$(-16m^2)^2 - 4(1 + m^2)(64m^2 - 36) = 0$$

$256m^4 - 4(64m^2 - 36 + 64m^4 - 36m^2) = 0$
$256m^4 - 4(28m^2 - 36 + 64m^4) = 0$
$256m^4 - 112m^2 + 144 - 256m^4 = 0$
$-112m^2 + 144 = 0$
$112m^2 = 144$
$7m^2 = 9$ ………………… (*kedua ruas dibagi dengan* 16)

$$m^2 = \frac{9}{7}$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{9}{7}} = \pm\frac{3}{\sqrt{7}} = \pm\frac{3}{7}\sqrt{7}$$

$$m = \frac{3}{7}\sqrt{7} \quad \text{atau} \quad m = -\frac{3}{7}\sqrt{7}$$

Nilai gradien m yang diperoleh disubstitusikan ke dalam persamaan (*) sehingga diperoleh dua garis singgung, yaitu:

$y = mx - 8m$	dan	$y = mx - 8m$
$y = \frac{3}{7}\sqrt{7}x - 8(\frac{3}{7}\sqrt{7})$		$y = -\frac{3}{7}\sqrt{7}x - 8(-\frac{3}{7}\sqrt{7})$
$y = \frac{3}{7}\sqrt{7}x - \frac{24}{7}\sqrt{7}$		$y = -\frac{3}{7}\sqrt{7}x + \frac{24}{7}\sqrt{7}$
$3\sqrt{7}x - 7y - 24\sqrt{7} = 0$		$3\sqrt{7}x + 7y - 24\sqrt{7} = 0$

b. Menggunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradien m

Persamaan garis singgung melalui titik $P(8, 0)$ dimisalkan
$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 0 = m(x - 8) \Leftrightarrow y = mx - 8m$ ……… (*)

Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ dengan gradien m adalah

$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ dengan $r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$

$y = mx \pm 6\sqrt{m^2 + 1}$ …………….. (**)

Selanjutnya *ruas kanan* persamaan (*) dan (**) disamakan, sehingga diperoleh,

$mx \pm 6\sqrt{m^2 + 1} = mx - 8m$

$\pm 6\sqrt{m^2 + 1} = -8m$

$36(m^2 + 1) = 64m^2$ ……………….. (*kedua ruas dikuadratkan*)

$36m^2 + 36 = 64m^2$

$28m^2 = 36$

$7m^2 = 9$ ………………….. (*kedua ruas dibagi* 7)

$$m^2 = \frac{9}{7}$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{9}{7}} = \pm\frac{3}{\sqrt{7}} = \pm\frac{3}{7}\sqrt{7}$$

$$m = \frac{3}{7}\sqrt{7} \quad \text{atau} \quad m = -\frac{3}{7}\sqrt{7}$$

Selanjutnya nilai m disubstitusikan ke dalam persamaan (*) sehingga diperoleh dua garis singgung seperti pada cara diskriminan, yaitu

$$y = \frac{3}{7}\sqrt{7}x - \frac{24}{7}\sqrt{7} \quad \text{dan} \quad y = -\frac{3}{7}\sqrt{7}x + \frac{24}{7}\sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{7}x - 7y - 24\sqrt{7} = 0 \text{ dan } 3\sqrt{7}x + 7y - 24\sqrt{7} = 0$$

c. *Menggunakan Persamaan Garis Kutub*

Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 36$
Karena $P(x_1, y_1) = P(8, 0)$ di luar lingkaran maka persamaan garis kutubnya adalah

$$x_1 x + y_1 y = 36$$
$$8x + 0y = 36$$
$$x = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

Untuk menentukan titik singgungnya, substitusikan $x = \frac{9}{2}$ ke persamaan lingkaran, diperoleh:

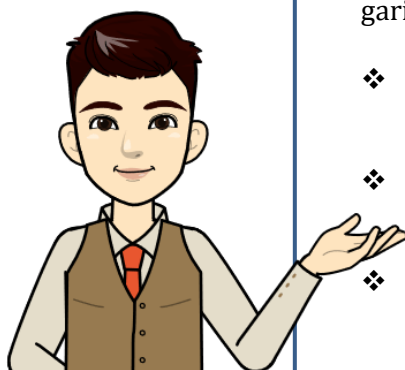
$$x^2 + y^2 = 36$$
$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 + y^2 = 36$$
$$y^2 = 36 - \frac{81}{4}$$
$$y^2 = \frac{63}{4} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{63}{4}} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{7}$$

Diperoleh titik singgung lingkaran $\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$ dan $\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$

Persamaan garis singgung lingkaran : $x_1 x + y_1 y = 36$.
Untuk $\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$ diperoleh persamaan $\frac{9}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{7}y = 36 \Leftrightarrow 3x + \sqrt{7}\,y - 24 = 0$.
Untuk $\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$ diperoleh persamaan $\frac{9}{2}x - \frac{3}{2}\sqrt{7}y = 36 \Leftrightarrow 3x - \sqrt{7}y - 24 = 0$.

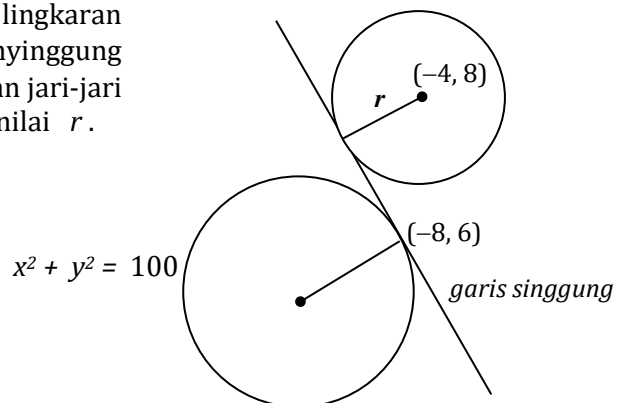
Persamaan Garis Kutub

Apabila titik $P(x_1, y_1)$ di luar lingkaran, maka persamaan garis kutub (polar) sebagai berikut.

- ❖ $x^2 + y^2 = r^2$ persamaan garis kutub adalah
  $x_1 x + y_1 y = r^2$
- ❖ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ persamaan garis kutub adalah $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$
- ❖ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ persamaan garis kutub adalah
  $x_1 x + y_1 y + \frac{A}{2}(x_1 + x) + \frac{B}{2}(y_1 + y) + C = 0$

C. Rangkuman

- Persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $x_1x + y_1y = r^2$.
- Persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$.
- Persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah $x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x_1 + x) + \frac{B}{2}(y_1 + y) + C = 0$.
- Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ yang mempunyai gradien m adalah $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$.
- Persamaan garis singgung lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ yang mempunyai gradien m adalah $(y - b) = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$.
- Persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1, y_1)$ di luar lingkaran dapat ditentukan dengan 3 cara, yaitu:
  1. menggunakan diskriminan persamaan kuadrat sekutu.
  2. menggunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradien diketahui.
  3. mencari titik singgung dengan cara menentukan persamaan garis kutub (polar) dari titik P dan memotongkannya dengan lingkaran.

D. Latihan Soal

1. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $K(-5, 7)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 74$.
2. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $M(2, 4)$ pada lingkaran $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 40$.
3. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $P(8, 2)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 20 = 0$.
4. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ di titik $(-8, 6)$ menyinggung lingkaran dengan pusat $(-4, 8)$ dan jari-jari r seperti pada gambar. Tentukan nilai r.

5. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 20$ yang bergradien 2.
6. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ yang tegak lurus garis $2x - y - 8 = 0$.
7. Tentukan persamaan garis singgung yang sejajar garis $y + 2x - 1 = 0$ pada lingkaran $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

8. Garis $x = 5$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ di dua titik.
   a. Tentukan koordinat kedua titik tersebut
   b. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui dua titik tersebut.
9. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik $T(7, 0)$ di luar lingkaran.
10. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik $(-1, 7)$ di luar lingkaran.

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 3

1. Alternatif Penyelesaian
   Persamaan garis singgung yang melalui titik $K(-5, 7)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 74$ adalah
   $x_1x + y_1y = 74$ dengan $x_1 = -5$ dan $y_1 = 7$
   $-5x + 7y = 74$
   $-5x + 7y - 74 = 0$ atau $5x - 7y + 74 = 0$

2. Alternatif Penyelesaian
   persamaan garis singgung yang melalui titik $M(2, 4)$ pada lingkaran $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 40$ adalah
   $(x_1 + 4)(x + 4) + (y_1 - 2)(y - 2) = 40$ dengan $x_1 = 2$ dan $y_1 = 4$
   $(2 + 4)(x + 4) + (4 - 2)(y - 2) = 40$
   $6(x + 4) + 2(y - 2) = 40$
   $6x + 24 + 2y - 4 = 40$
   $6x + 2y - 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + y - 10 = 0$

3. Alternatif Penyelesaian
   Persamaan garis singgung yang melalui titik $P(8, 2)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 20 = 0$ adalah
   $x_1x + y_1y - \frac{12}{2}(x_1 + x) + \frac{4}{2}(y_1 + y) + 20 = 0$ dengan $x_1 = 8$ dan $y_1 = 2$
   $$8x + 2y - \frac{12}{2}(8 + x) + \frac{4}{2}(2 + y) + 20 = 0$$
   $8x + 2y - 48 - 6x + 4 + 2y + 20 = 0$
   $2x + 4y - 24 = 0$ atau $x + 2y - 12 = 0$

4. Alternatif Penyelesaian
   Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ di titik $(-8, 6)$ adalah
   $x_1x + y_1y = 100$ dengan $x_1 = -8$ dan $y_1 = 6$
   $-8x + 6y = 100$
   $-4x + 3y - 50 = 0$

   Jari-jari r lingkaran kedua adalah jarak titik pusat $(-4, 8)$ ke garis singgung $-4x + 3y - 50 = 0$
   $$r = \frac{|-4(-4) + 3(8) - 50|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{|16 + 24 - 50|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|-10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

5. Alternatif Penyelesaian
   Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 20$ yang bergradien 2.
   Diketahui $r = \sqrt{20}$ dan $m = 2$, maka persamaan garis singgungnya adalah
   $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
   $\Leftrightarrow \; y = 2x \pm \sqrt{20}\sqrt{2^2 + 1}$
   $\Leftrightarrow \; y = 2x \pm \sqrt{100} \; \Leftrightarrow y = 2x \pm 10$
   Jadi, persamaan garis lingkaran $x^2 + y^2 = 20$ yang bergradien 2 adalah
   $y = 2x + 10$ dan $y = 2x - 10$.

6. Alternatif Penyelesaian
   Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ yang tegak lurus garis $2x - y - 8 = 0$.
   Garis $2x - y - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \; y = 2x - 8$ berarti gradien $m_1 = 2$.

Garis singgung lingkaran tegak lurus garis $2x - y - 8 = 0$, sehingga berlaku :

$$m = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Jari-jari lingkaran $r = \sqrt{16} = 4$ maka persamaan garis singgungnya adalah

$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

$\Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{2}x \pm 4\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$

$\Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{2}x \pm 4\sqrt{\frac{1}{4} + 1}$

$\Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{2}x \pm 4\sqrt{\frac{5}{4}}\ \ \Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{2}x \pm 2\sqrt{5}$

Jadi, persamaan garis lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ yang tegak lurus garis $2x - y - 8 = 0$ adalah $y = -\frac{1}{2}x + 2\sqrt{5}$ dan $y = -\frac{1}{2}x - 2\sqrt{5}$.

7. Alternatif Penyelesaian

Persamaan garis singgung yang sejajar garis $y + 2x - 1 = 0$ pada lingkaran $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Garis $y + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 1$ mempunyai gradien $m_1 = -2$. Garis singgung lingkaran **sejajar** garis $y + 2x - 1 = 0$, berarti gradien garis singgung adalah $m = -2$. (sejajar, maka $m = m_1$)

Jari-jari lingkaran $r = \sqrt{25} = 5$, maka persamaan garis singgungnya adalah

$$(y - b) = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$(y - 1) = -2(x - 2) \pm 5\sqrt{(-2)^2 + 1}$$

$$y = -2x + 4 + 1 \pm 5\sqrt{5}$$

$$y = -2x + 5 \pm 5\sqrt{5}$$

Jadi, persamaan garis lingkaran $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ yang sejajar garis $y + 2x - 1 = 0$ adalah $y = -2x + 5 + 5\sqrt{5}$ dan $y = -2x + 5 - 5\sqrt{5}$.

8. Alternatif Penyelesaian

a. substitusi $x = 5$ ke lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, diperoleh

$5^2 + y^2 - 4(5) - 6y - 12 = 0$
$25 + y^2 - 20 - 6y - 12 = 0$
$y^2 - 6y - 7 = 0$
$(y + 1)(y - 7) = 0$
$y + 1 = 0$ atau $y - 7 = 0$
$y = -1$ atau $y = 7$

sehingga diperoleh koordinat titik potong garis $x = 5$ dengan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ adalah $(5, -1)$ dan $(5, 7)$

b. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
melalui titik $(5, -1)$ pada lingkaran:
$x_1x + y_1y - \frac{4}{2}(x_1 + x) - \frac{6}{2}(y_1 + y) - 12 = 0$ dengan $x_1 = 5$ dan $y_1 = -1$

$5x - 1y - 2(5 + x) - 3(-1 + y) - 12 = 0$
$5x - y - 10 - 2x + 3 - 3y - 12 = 0$
$3x - 4y - 19 = 0$

melalui titik $(5, 7)$ pada lingkaran:

$x_1x + y_1y - \frac{4}{2}(x_1 + x) - \frac{6}{2}(y_1 + y) - 12 = 0$ dengan $x_1 = 5$ dan $y_1 = 7$

$5x + 7y - 2(5 + x) - 3(7 + y) - 12 = 0$
$5x + 7y - 10 - 2x - 21 - 3y - 12 = 0$
$3x + 4y - 43 = 0$

9. Alternatif Penyelesaian
Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik $T(7, 0)$ di luar lingkaran.

Karena $T(x_1, y_1) = T(7, 0)$ di luar lingkaran maka persamaan garis kutubnya adalah
$x_1 x + y_1 y = 25$
$7x + 0y = 25$
$x = \frac{25}{7}$

Untuk menentukan titik singgungnya, substitusikan $x = \frac{25}{7}$ ke persamaan lingkaran, diperoleh:
$x^2 + y^2 = 25$
$\left(\frac{25}{7}\right)^2 + y^2 = 25$
$y^2 = 25 - \frac{625}{49}$
$y^2 = \frac{600}{49} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{600}{49}} = \pm\frac{10}{7}\sqrt{6}$

Diperoleh titik singgung lingkaran $\left(\frac{25}{7}, \frac{10}{7}\sqrt{6}\right)$ dan $\left(\frac{25}{7}, -\frac{10}{7}\sqrt{6}\right)$

Persamaan garis singgung lingkaran : $x_1 x + y_1 y = 25$.
Untuk $\left(\frac{25}{7}, \frac{10}{7}\sqrt{6}\right)$ diperoleh persamaan garis singgung $\frac{25}{7}x + \frac{10}{7}\sqrt{6}y = 25$
$\Leftrightarrow 25x + 10\sqrt{6}y - 175 = 0.$
Untuk $\left(\frac{25}{7}, -\frac{10}{7}\sqrt{6}\right)$ diperoleh persamaan garis singgung $\frac{25}{7}x - \frac{10}{7}\sqrt{6}y = 25$
$\Leftrightarrow 25x - 10\sqrt{6}y - 175 = 0.$

10. Alternatif Penyelesaian
Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik $(-1, 7)$ di luar lingkaran.

Misalkan garis singgung lingkaran adalah
$y - 7 = m(x + 1) \Leftrightarrow y = mx + m + 7$

Substitusi $y = mx + m + 7$ ke lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, sehingga diperoleh

$x^2 + (mx + m + 7)^2 = 25$
$x^2 + m^2x^2 + 2mx(m + 7) + (m + 7)^2 = 25$
$(1 + m^2)x^2 + (2m^2 + 14m)x + m^2 + 14m + 24 = 0$

Syarat garis menyinggung lingkaran adalah D = 0, sehingga diperoleh:

$(2m^2 + 14m)^2 - 4(1 + m^2)(m^2 + 14m + 24) = 0$
$4m^4 + 56m^3 + 196m^2 - 4m^2 - 56m - 96 - 4m^4 - 56m^3 - 96m^2 = 0$
$96m^2 - 56m - 96 = 0$
$12m^2 - 7m - 12 = 0$
$(3m - 4)(4m + 3) = 0$
$m = \frac{4}{3}$ atau $m = -\frac{3}{4}$

Substitusikan nilai m ke $y = mx + m + 7$, diperoleh

$y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} + 7 \Rightarrow 3y = 4x + 4 + 21 \Leftrightarrow 4x - 3y + 25 = 0$
dan $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + 7 \Rightarrow 4y = -3x - 3 + 28 \Leftrightarrow 3x + 4y - 25 = 0$
Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik $(-1, 7)$ di luar lingkaran adalah $4x - 3y + 25 = 0$ dan $3x + 4y - 25 = 0$.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda tahu yang dimaksud garis singgung lingkaran?	○	○
2	Apakah Anda tahu yang dimaksud gradien dari suatu persamaan garis lurus?	○	○
3	Apakah Anda dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik pada lingkaran?	○	○
4	Apakah Anda dapat menentukan persamaan lingkaran yang memiliki gradien m?	○	○
5	Apakah Anda dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui titik di luar lingkaran?	○	○
6	Apakah Anda dapat menyelesaikan masalah yang terkait persamaan garis singgung lingkaran?	○	○
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 4
KEDUDUKAN DUA LINGKARAN

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan kalian dapat menentukan kedudukan dua lingkaran, menentukan persamaan berkas lingkaran, dan menyelesaikan masalah terkait kedudukan dua lingkaran.

B. Uraian Materi

1. Kedudukan Dua Lingkaran

Misalkan terdapat dua buah lingkaran L_1 dan L_2, dimana

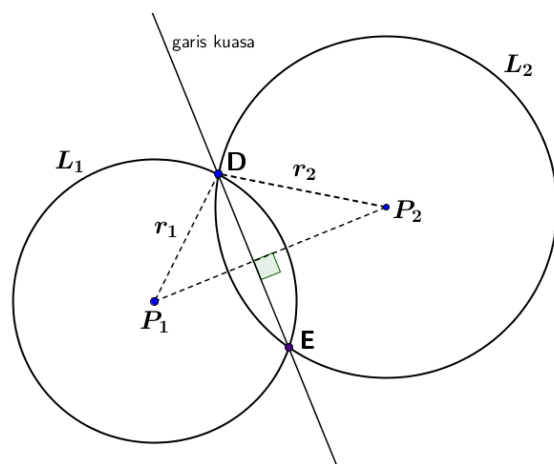
$L_1 \equiv x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ dengan pusat P_1 dan jari-jari r_1,

$L_2 \equiv x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$, dengan pusat P_2 dan jari-jari r_2.

Kedudukan dari kedua lingkaran L_1 dan L_2 ada beberapa kemungkinan, yaitu:

a. Dua lingkaran berpotongan

Perhatikan gambar di samping! Lingkaran L_1 dan L_2 berpotongan di dua titik, D dan E. Segmen garis DE disebut *tali busur sekutu*.
Perhatikan segitiga DP_1P_2. Dalam ketaksamaan segitiga diketahui bahwa jumlah dua sisi segitiga selalu lebih besar dari pada sisi ketiganya. Berdasarkan hal tersebut, maka dua lingkaran berpotongan jika jarak

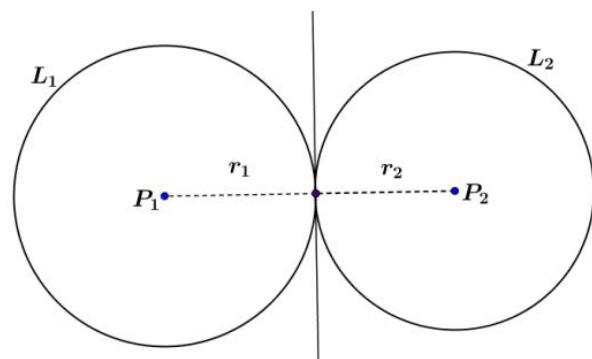
$$\boldsymbol{P_1P_2 < r_1 + r_2}.$$

Gambar 4.1. Dua lingkaran berpotongan

b. Dua lingkaran bersinggungan

Ada dua kemungkinan untuk dua lingkaran saling bersinggungan, yaitu bersinggungan luar atau bersinggungan dalam.

Pada gambar di samping ditunjukkan dua lingkaran yang *saling bersinggungan luar*. Hal ini dapat terjadi jika jarak antara kedua pusat lingkaran sama dengan jumlah jari-jari kedua lingkaran tersebut.

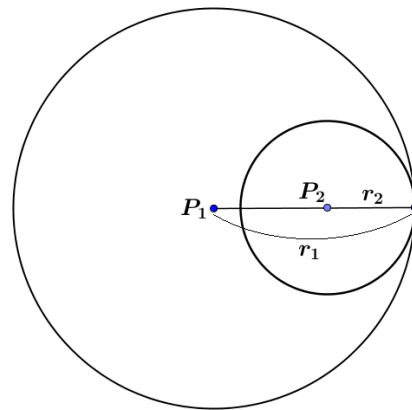
Bersinggungan Luar:

$$\boldsymbol{P_1P_2 = r_1 + r_2}.$$

Gambar 4.2. Dua lingkaran bersinggungan luar

Pada gambar di samping ditunjukkan dua lingkaran yang *saling bersinggungan dalam*.

Hal ini dapat terjadi jika jarak antara kedua pusat lingkaran sama dengan selisih jari-jari kedua lingkaran tersebut.

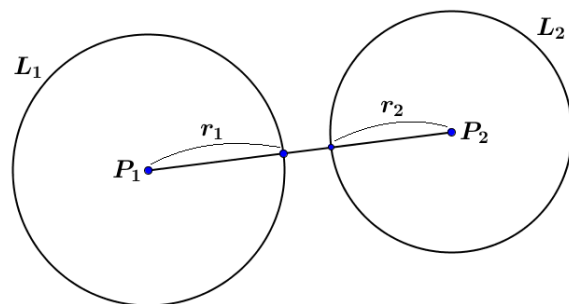
Bersinggungan dalam:

$$P_1P_2 = |r_1 - r_2|$$

Gambar 4.3. Dua lingkaran bersinggungan dalam

c. *Dua lingkaran tidak berpotongan atau bersinggungan*

Pada gambar di samping ditunjukkan dua lingkaran yang *tidak berpotongan atau bersinggungan*. Hal ini dapat terjadi jika jarak antara kedua pusat lingkaran lebih besar daripada jumlah jari-jari kedua lingkaran tersebut.

Tidak Berpotongan :

$$P_1P_2 > r_1 + r_2$$

Gambar 4.4. Dua lingkaran tidak berpotongan

d. *Dua lingkaran berpotongan tegak lurus (Orthogonal)*

Dua lingkaran dikatakan berpotongan orthogonal (tegak lurus) jika garis singgung kedua lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran membentuk sudut 90^o (atau saling tegak lurus), seperti yang ditunjukkan pada gambar di samping.

Dua lingkaran berpotongan tegak lurus jika dipenuhi syarat kuadrat jarak antara pusat kedua lingkaran ($P_1P_2^2$) sama dengan jumlah kuadrat jari-jarinya ($r_1^2 + r_2^2$).

Gambar 4.5. Dua lingkaran berpotongan tegak lurus

Dua lingkaran orthogonal : $(P_1P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$.

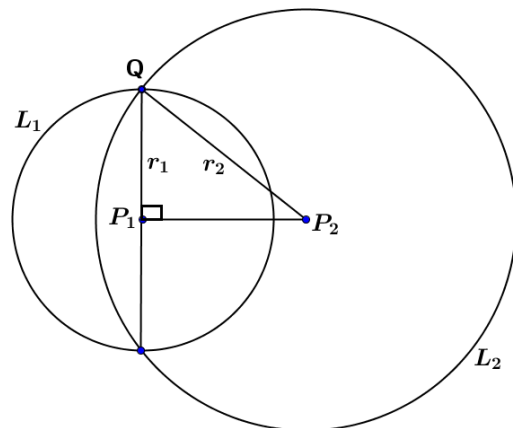
Catatan:
Jika lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ dan lingkaran $L_2 \equiv x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$, maka kedua lingkaran juga akan berpotongan tegak lurus jika memenuhi syarat:

$$2A_1A_2 + 2B_1B_2 = C_1 + C_2$$

e. Lingkaran L_2 memotong dan membagi dua sama besar lingkaran L_1

Gambar di samping menunjukkan lingkaran L_2 membagi dua sama besar lingkaran L_1. Hal ini terjadi jika dipenuhi syarat kuadrat jarak antara pusat kedua lingkaran ($P_1P_2^2$) sama dengan selisih kuadrat jari-jarinya ($r_2^2 - r_1^2$).

Lingkaran L_2 memotong dan membagi dua sama besar lingkaran L_1 :

$$(P_1P_2)^2 = r_2^2 - r_1^2$$

Gambar 4.6. Dua lingkaran berpotongan membagi dua sama besar

Contoh 1.

Tunjukkan bahwa lingkaran $x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$ dan lingkaran $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$ saling bersinggungan dan carilah titik singgungnya.

Jawab

Misalkan kedua lingkaran adalah L_1 dan L_2.

$L_1 \equiv x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$

Pusat $P_1\left(-\frac{1}{2}(-16), -\frac{1}{2}(-20)\right) = P_1(8, 10)$

Jari-jari $r_1 = \sqrt{8^2 + 10^2 - 115} = \sqrt{64 + 100 - 115} = \sqrt{49} = 7$

$L_1 \equiv x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$

Pusat $P_2\left(-\frac{1}{2}(8), -\frac{1}{2}(-10)\right) = P_2(-4 , 5)$

Jari-jari $r_2 = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 - 5} = \sqrt{16 + 25 - 5} = \sqrt{36} = 6$

Untuk menentukan jenis kedudukan kedua lingkaran, maka perlu dibandingkan jarak antara pusat P_1P_2 dengan jumlah jari-jari kedua lingkaran $r_1 + r_2$.

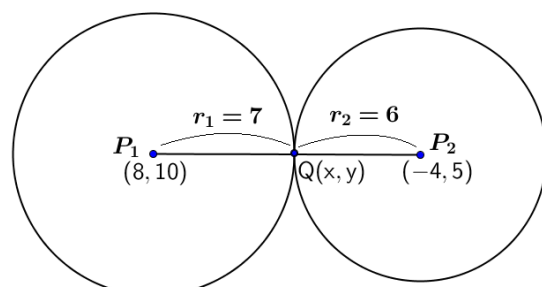
Jarak P_1P_2 = jarak antara titik (8, 10) dan (−4 , 5)

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{(8 - (-4))^2 + (10 - 5)^2} \\ &= \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} \\ &= \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

Jumlah jari-jari $r_1 + r_2 = 7 + 6 = 13$

Karena $P_1P_2 = r_1 + r_2$, maka kedua lingkaran ***bersinggungan luar***.

Untuk menentukan koordinat titik singgung kedua lingkaran dapat digunakan rumus perbandingan segmen garis berikut ini.

$$\mathbf{P_1Q : QP_2 = 7 : 6}$$

Koordinat Q = (x, y) = $\frac{7P_2 + 6P_1}{7+6}$

(x, y) = $\frac{7(-4,\ 5)+6(8,\ 10)}{13} = \frac{(-28,\ 35)+(48,\ 60)}{13}$

(x, y) = $\frac{(20,\ 95)}{13} = \left(\frac{20}{13}, \frac{95}{13}\right)$

Jadi koordinat titik singgung kedua lingkaran adalah $Q\left(\frac{20}{13}, \frac{95}{13}\right)$.

Contoh 2.

Diketahui lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x = 0$. Selidiki, apakah kedua lingkaran tersebut berpotongan?

Jawab

$L_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$

Pusat $P_1\left(-\frac{1}{2}(6), -\frac{1}{2}(0)\right) = P_1(-3, 0)$

Jari-jari $r_1 = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 - 5} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$

$L_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x = 0$

Pusat $P_2\left(-\frac{1}{2}(-4), -\frac{1}{2}(0)\right) = P_2(2, 0)$

Jari-jari $r_2 = \sqrt{2^2 + 0^2 - 0} = \sqrt{4} = 2$

Untuk menentukan jenis kedudukan kedua lingkaran, maka perlu dibandingkan jarak antara pusat P_1P_2 dengan jumlah jari-jari kedua lingkaran $r_1 + r_2$.

Jarak P_1P_2 = jarak antara titik (−3, 0) dan (2 , 0)

$P_1P_2 = \sqrt{(-3-2)^2 + (0-0)^2}$

$= \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

Jumlah jari-jari $r_1 + r_2 = 2 + 2 = 4$

Karena $P_1P_2 > r_1 + r_2$, maka kedua lingkaran ***tidak saling berpotongan***.

Contoh 3.

Diketahui dua lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ dan lingkaran $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x + 2y - 3 = 0$. Tentukan banyak garis singgung persekutuan dari dua lingkaran tersebut.

Jawab

Untuk mengetahui banyak garis singgung persekutuan dua lingkaran, kita perlu mengetahui kedudukan kedua lingkaran.

$L_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$

Pusat $P_1\left(-\frac{1}{2}(-4), -\frac{1}{2}(0)\right) = P_1(2, 0)$

Jari-jari $r_1 = \sqrt{2^2 + 0^2 - (-1)} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$L_1 \equiv x^2 + y^2 - 8x + 2y - 3 = 0$

Pusat $P_2\left(-\frac{1}{2}(-8), -\frac{1}{2}(2)\right) = P_2(4, -1)$

Jari-jari $r_2 = \sqrt{4^2 + (-1)^2 - (-3)} = \sqrt{16 + 1 + 3} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Untuk menentukan jenis kedudukan kedua lingkaran, maka perlu dihitung jarak antara pusat P_1P_2, $r_1 + r_2$, dan $|r_1 - r_2|$.

Jarak P_1P_2 = jarak antara titik (2, 0) dan (4, –1)

$P_1P_2 = \sqrt{(2-4)^2 + (0-(-1))^2}$

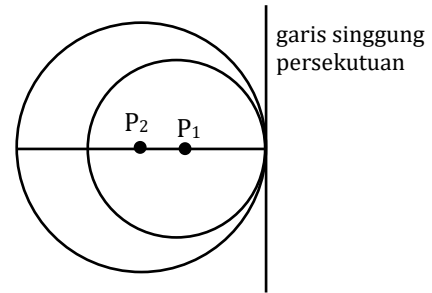
$= \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+1}$

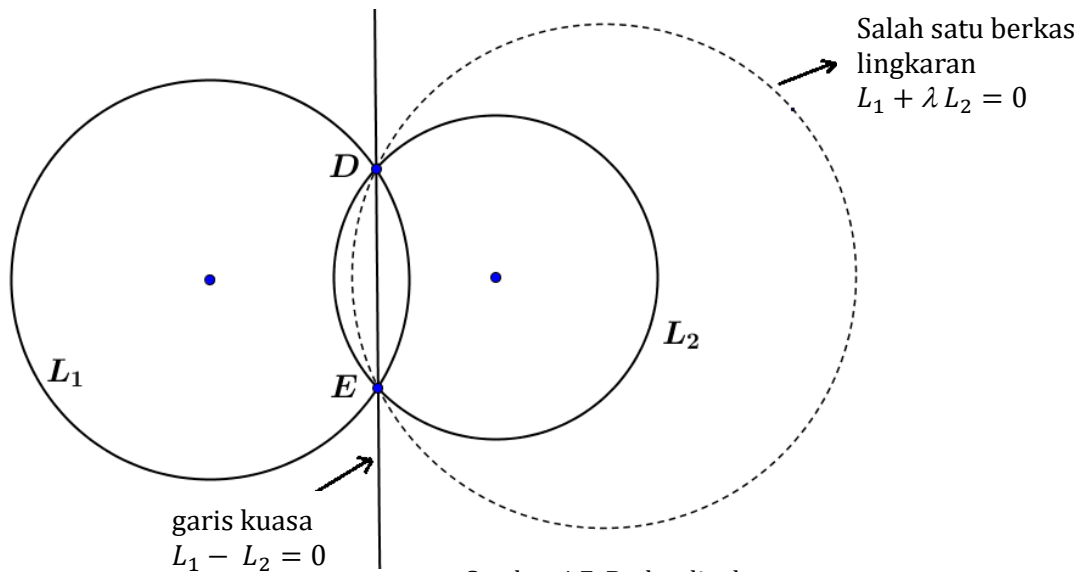
$= \sqrt{5}$

$r_1 + r_2 = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$|r_1 - r_2| = |\sqrt{5} - 2\sqrt{5}| = |-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

Karena $P_1P_2 = |r_1 - r_2|$, maka kedua lingkaran ***bersinggungan dalam***.

Dua lingkaran yang bersinggungan dalam hanya dapat dibuat satu garis singgung persekutuan.

2. Berkas Lingkaran

Misalkan dua lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ berpotongan dengan lingkaran $L_2 \equiv x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$ pada dua titik potong, D dan E, dengan DE disebut *tali busur sekutu*. Dari tali busur sekutu (DE) ini bisa dibuat sejumlah lingkaran yang disebut sebagai *berkas lingkaran*.

Gambar 4.7. Berkas lingkaran

Gambar di atas menunjukkan salah satu berkas lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran (D dan E), dimana garis DE adalah bagian dari garis kuasa kedua lingkaran yang memenuhi persamaan $L_1 - L_2 = 0$. Berkas lingkaran terdiri atas sejumlah lingkaran yang memenuhi suatu persamaan umum tertentu, dengan parameternya saja yang berbeda.

Misalkan parameter ini diberi simbol λ (dibaca "lamda") maka persamaan berkas lingkaran mirip persamaan garis kuasa $L_1 - L_2 = 0$ dengan menyisipkan parameter λ pada L_2, sehingga persamaan berkas lingkaran untuk kedua lingkaran L_1 dan L_2 adalah ***berkas lingkaran*** $\mathbf{L_1 + \lambda L_2 = 0}$.

Persamaan berkas lingkaran: $\mathbf{L_1 + \lambda L_2 = 0}$

Salah satu persamaan berkas $L_1 + \lambda L_2 = 0$ yang melalui titik potong D dan E ditunjukkan pada gambar di atas. Himpunan semua lingkaran yang memenuhi $L_1 + \lambda L_2 = 0$ disebut ***berkas lingkaran*** dengan L_1 dan L_2 sebagai lingkaran dasar.

Kita akan menganalisis persamaan berkas lingkaran dengan mengubah ke bentuk umum persamaan lingkaran berikut ini.

$L_1 + \lambda L_2 = 0$ ………… (*)

$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2)= 0$ ………… (**)

$\Leftrightarrow$ $(x^2 + \lambda x^2) + (y^2 + \lambda y^2) + (A_1 x + \lambda A_2 x) + (B_1 y + \lambda B_2 y) + (C_1 + \lambda C_2) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(1 + \lambda)x^2 + (1 + \lambda)y^2 + (A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2) = 0$

Bagi kedua ruas di atas dengan $(1 + \lambda)$ diperoleh

$$x^2 + y^2 + \frac{A_1 + \lambda A_2}{1+\lambda}x + \frac{B_1 + \lambda B_2}{1+\lambda}y + \frac{C_1 + \lambda C_2}{1+\lambda} = 0 \quad \text{………… (***)}$$

Persamaan (***) di atas menunjukkan suatu persamaan lingkaran untuk setiap nilai λ. Perhatikan beberapa kasus di bawah ini.

1. Jika $\lambda = 0$, maka dari persamaan berkas lingkaran (*), yaitu $L_1 + \lambda L_2 = 0$ akan diperoleh $L_1 = 0$.
2. Jika $\lambda \to \infty$ maka dari persamaan (***) diperoleh,

   $$x^2 + y^2 + \frac{\lambda A_2}{\lambda}x + \frac{\lambda B_2}{\lambda}y + \frac{\lambda C_2}{\lambda} = 0$$

   $x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$ atau $L_2 = 0$

3. Jika $\lambda = -1$, maka dari persamaan berkas lingkaran (*) diperoleh,

   $L_1 + \lambda L_2 = 0$
   $L_1 + (-1)L_2 = 0$
   $L_1 - L_2 = 0$

   artinya garis kuasa terhadap lingkaran L_1 dan L_2 termasuk salah satu persamaan berkas lingkaran. Garis kuasa dapat dianggap sebagai lingkaran dengan pusat pada garis hubung titik pusat kedua lingkaran dan terletak di tak hingga, sehingga busurnya berupa garis lurus.

Contoh 4.

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$, serta melalui titik asal (0, 0).

Jawab

Lingkaran yang dicari melalui titik potong lingkaran L_1 dan L_2 , dan ini merupakan salah satu anggota dari berkas lingkaran L_1 dan L_2 yang dirumuskan oleh persamaan $L_1 + \lambda L_2 = 0$.

$L_1 + \lambda L_2 = 0$ dengan λ sebagai parameter

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 + \lambda(x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4) = 0$ ………… (*)

Persamaan (*) melalui titik asal (0, 0), berarti x = 0 dan y = 0 dapat disubstitusi ke persamaan (*) untuk menghitung parameter λ.

$$0^2 + 0^2 + 2(0) + 2(0) - 2 + \lambda(0^2 + 0^2 + 4(0) - 8(0) + 4) = 0$$

$$-2 + \lambda(4) = 0$$

$$4\lambda = 2$$

$$\lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Substitusi nilai parameter $\lambda = \frac{1}{2}$ ke persamaan (*) untuk memperoleh persamaan lingkaran tersebut.

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4) = 0$ ………. kalikan dengan 2

⇔ $2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y - 4 + (x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4) = 0$

⇔ $2x^2 + x^2 + 2y^2 + y^2 + 4x + 4x + 4y - 8y - 4 + 4 = 0$

⇔ $3x^2 + 3y^2 + 8x - 4y = 0$

Jadi, persamaan lingkaran yang dimaksud adalah $3x^2 + 3y^2 + 8x - 4y = 0$.

Contoh 5.

Diketahui lingkaran A dengan pusat (0, 1) dan jari-jari 3 satuan, dan lingkaran B dengan pusat (0, –1) dan jari-jari 3. Tentukan persamaan berkas lingkaran yang terbentuk dari kedua lingkaran tersebut dan melalui pusat lingkaran B.

Jawab

Persamaan lingkaran A adalah $L_A \equiv x^2 + (y - 1)^2 = 9$
Persamaan lingkaran B adalah $L_B \equiv x^2 + (y + 1)^2 = 9$

Persamaan berkas lingkaran yang dimaksud adalah,

$L_A + \lambda L_B = 0$

$x^2 + (y - 1)^2 - 9 + \lambda(x^2 + (y + 1)^2 - 9) = 0$

⇔ $x^2 + y^2 - 2y + 1 - 9 + \lambda(x^2 + y^2 + 2y + 1 - 9) = 0$

⇔ $x^2 + y^2 - 2y - 8 + \lambda(x^2 + y^2 + 2y - 8) = 0$ ……….. (*)

Berkas lingkaran melalui titik pusat lingkaran B, yaitu (0, –1), berarti x = 0 dan y = –1 dapat disubstitusi ke persamaan (*) untuk menghitung parameter λ.

⇔ $(0)^2 + (-1)^2 - 2(-1) - 8 + \lambda((0)^2 + (-1)^2 + 2(-1) - 8) = 0$

⇔ $0 + 1 + 2 - 8 + + \lambda(0 + 1 - 2 - 8) = 0$

⇔ $-5 + \lambda(-9) = 0$

⇔ $-9\lambda = 5$ ⇔ $\lambda = -\frac{5}{9}$

Substitusi nilai parameter $\lambda = -\frac{5}{9}$ ke persamaan (*) untuk memperoleh persamaan lingkaran tersebut.

$x^2 + y^2 - 2y - 8 - \frac{5}{9}(x^2 + y^2 + 2y - 8) = 0$ ………… Kalikan dengan 9

⇔ $9x^2 + 9y^2 - 18y - 72 - 5(x^2 + y^2 + 2y - 8) = 0$

$\Leftrightarrow$ $9x^2 + 9y^2 - 18y - 72 - 5x^2 - 5y^2 - 10y + 40 = 0$

$\Leftrightarrow$ $4x^2 + 4y^2 - 28y - 32 = 0$

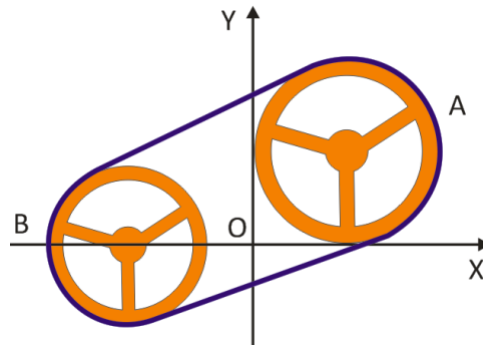
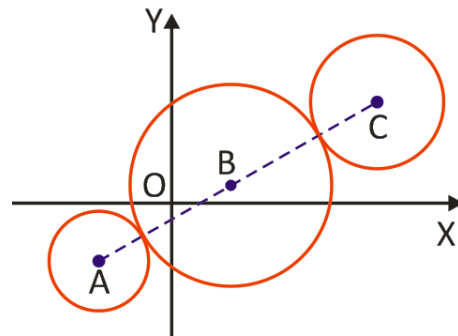
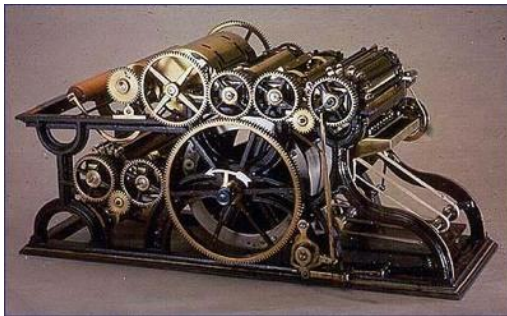
$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 - 7y - 8 = 0$

Jadi, persamaan lingkaran yang dimaksud adalah $x^2 + y^2 - 7y - 8 = 0$.

C. Rangkuman

- Misalkan lingkaran L_1 dengan pusat P_1 dan jari-jari r_1, dan lingkaran L_2 dengan pusat P_2 dan jari-jari r_2. Lingkaran L_1 dan L_2 berpotongan pada dua titik jika jarak $P_1P_2 < r_1 + r_2$.
- Misalkan lingkaran L_1 dengan pusat P_1 dan jari-jari r_1, dan lingkaran L_2 dengan pusat P_2 dan jari-jari r_2. Lingkaran L_1 dan L_2 bersinggungan luar jika jarak $P_1P_2 = r_1 + r_2$.
- Misalkan lingkaran L_1 dengan pusat P_1 dan jari-jari r_1, dan lingkaran L_2 dengan pusat P_2 dan jari-jari r_2. Lingkaran L_1 dan L_2 bersinggungan dalam jika jarak $P_1P_2 = |r_1 - r_2|$.
- Misalkan lingkaran L_1 dengan pusat P_1 dan jari-jari r_1, dan lingkaran L_2 dengan pusat P_2 dan jari-jari r_2. Lingkaran L_1 dan L_2 berpotongan tegak lurus jika jarak $(P_1P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$.
- Misalkan lingkaran L_1 dengan pusat P_1 dan jari-jari r_1, dan lingkaran L_2 dengan pusat P_2 dan jari-jari r_2. Lingkaran L_2 memotong dan membagi dua sama besar lingkaran L_1 jika jarak $(P_1P_2)^2 = r_2^2 - r_1^2$.
- Misalkan dua lingkaran L_1 dan L_2. Berkas lingkaran dari L_1 dan L_2 adalah lingkaran-lingkaran yang dibuat melalui titik potong lingkaran L_1 dan L_2 dengan persamaan $L_1 + \lambda L_2 = 0$.

D. Latihan Soal

1. Tunjukkan bahwa lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 10x + 4y - 7 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 18x + 4y + 21 = 0$ bersinggungan luar. Tentukan titik singgung tersebut.
2. Tunjukkan bahwa lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 2y - 54 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 22x - 8y + 112 = 0$ tidak saling berpotongan.
3. Lingkaran-lingkaran $x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$ saling bersinggungan. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik singgung tersebut dan memiliki jari-jari ½.
4. Mesin dalam sebuah pabrik penggilingan tepung memiliki roda A yang menggerakkan roda B melalui sebuah rantai. Dengan sumbu-sumbu koordinat, ditunjukkan roda A memiliki jari-jari 10 unit dan menyentuh kedua sumbu.
   a. Tentukan persamaan roda A.
   b. Jika roda B memiliki persamaan $x^2 + y^2 + 28x + 147 = 0$ dan 1 unit = 10 cm, hitunglah:
      (i) jarak antara pusat kedua roda
      (ii) celah terpendek di antara kedua roda

5. Surat kabar dicetak oleh *lithograph*, cetakan berita yang harus bergerak melalui tiga buah pemutar (*roller*), yang diilustrasikan pada gambar sebagai tiga buah lingkaran. Pusat-pusat A, B, dan C dari ketiga lingkaran adalah *kolinear* (terletak pada suatu garis lurus). Persamaan lingkaran luar masing-masing adalah $(x + 12)^2 + (y + 15)^2 = 25$ dan $(x - 24)^2 + (y - 12)^2 = 100$. Tentukan persamaan lingkaran di tengah.

6. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$, serta melalui titik (2, –1).

7. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 3y - 7 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 3x - 2y - 1 = 0$, serta melalui titik (1, 2).

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 4

1. Alternatif Penyelesaian

   $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 10x + 4y - 7 = 0$

   Pusat $P_1\left(-\frac{1}{2}(10), -\frac{1}{2}(4)\right) = P_1(-5, -2)$

   Jari-jari $r_1 = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2 - (-7)} = \sqrt{25 + 4 + 7} = \sqrt{36} = 6$

   $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 18x + 4y + 21 = 0$

   Pusat $P_2\left(-\frac{1}{2}(-18), -\frac{1}{2}(4)\right) = P_2(9, -2)$

   Jari-jari $r_2 = \sqrt{9^2 + (-2)^2 - 21} = \sqrt{81 + 4 - 21} = \sqrt{64} = 8$

   Untuk menentukan jenis kedudukan kedua lingkaran, maka perlu dibandingkan jarak antara pusat P_1P_2 dengan jumlah jari-jari kedua lingkaran $r_1 + r_2$.

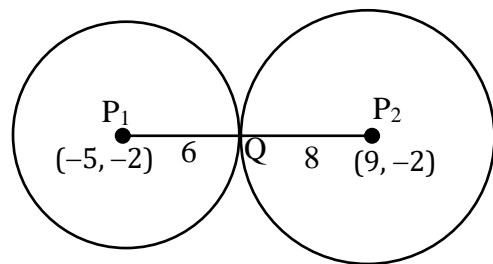
   Jarak P_1P_2 = jarak antara titik (–5, –2) dan (9, –2)

   $P_1P_2 = \sqrt{(9 - (-5))^2 + (-2 - (-2))^2}$
   $= \sqrt{14^2 + 0^2} = \sqrt{14^2} = 14$

   Jumlah jari-jari $r_1 + r_2 = 6 + 8 = 14$

   Karena $P_1P_2 = r_1 + r_2$, maka kedua lingkaran bersinggungan luar.

   Untuk menentukan koordinat titik singgung kedua lingkaran dapat digunakan rumus perbandingan segmen garis berikut ini.

   $P_1Q : QP_2 = 6 : 8$

   Koordinat Q = (x, y) = $\frac{6P_2 + 8P_1}{6 + 8}$

   $(x, y) = \frac{6(9, -2) + 8(-5, -2)}{14} = \frac{(54, -12) + (-40, -16)}{14}$

   $(x, y) = \frac{(14, -28)}{14} = \left(\frac{14}{14}, \frac{-28}{14}\right) = (1, -2)$

   Jadi koordinat titik singgung kedua lingkaran adalah $Q(1, -2)$.

2. Alternatif Penyelesaian

   $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 2y - 54 = 0$

   Pusat $P_1\left(-\frac{1}{2}(6), -\frac{1}{2}(-2)\right) = P_1(-3, 1)$

   Jari-jari $r_1 = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 - (-54)} = \sqrt{9 + 1 + 54} = \sqrt{64} = 8$

   $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 22x - 8y + 112 = 0$

   Pusat $P_2\left(-\frac{1}{2}(-22), -\frac{1}{2}(-8)\right) = P_2(11, 4)$

   Jari-jari $r_2 = \sqrt{11^2 + 4^2 - 112} = \sqrt{121 + 16 - 112} = \sqrt{25} = 5$

   Untuk menentukan jenis kedudukan kedua lingkaran, maka perlu dibandingkan jarak antara pusat P_1P_2 dengan jumlah jari-jari kedua lingkaran $r_1 + r_2$.

   Jarak P_1P_2 = jarak antara titik (–3, 1) dan (11, 4)

   $P_1P_2 = \sqrt{(11 - (-3))^2 + (4 - 1)^2}$
   $= \sqrt{14^2 + 3^2} = \sqrt{196 + 9} = \sqrt{205} = 14{,}32$

   Jumlah jari-jari $r_1 + r_2 = 8 + 5 = 13$

Karena $P_1P_2 > r_1 + r_2$, maka kedua lingkaran tidak saling berpotongan.

3. Alternatif Penyelesaian

L_1: $x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$

Pusat $P_1\left(-\frac{1}{2}(-16), -\frac{1}{2}(-20)\right) = P_1(8, 10)$

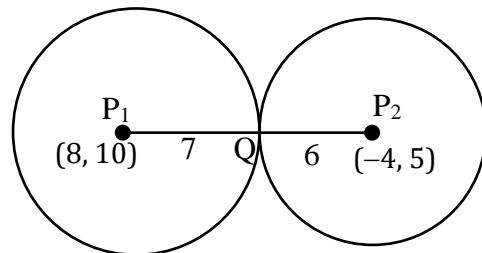
Jari-jari $r_1 = \sqrt{8^2 + 10^2 - 115} = \sqrt{64 + 100 - 115} = \sqrt{49} = 7$

L_2: $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$

Pusat $P_2\left(-\frac{1}{2}(8), -\frac{1}{2}(-10)\right) = P_2(-4, 5)$

Jari-jari $r_2 = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 - 5} = \sqrt{16 + 25 - 5} = \sqrt{36} = 6$

Untuk menentukan koordinat titik singgung kedua lingkaran dapat digunakan rumus perbandingan segmen garis berikut ini.

$P_1Q : QP_2 = 7 : 6$

Koordinat Q = $(x, y) = \frac{7P_2 + 6P_1}{7 + 6}$

$(x, y) = \frac{7(-4,\ 5) + 6(8,\ 10)}{13} = \frac{(-28,\ 35) + (48,\ 60)}{13}$

$(x, y) = \frac{(20,\ 95)}{13} = \left(\frac{20}{13}, \frac{95}{13}\right)$.

Jadi koordinat titik singgung kedua lingkaran adalah $Q\left(\frac{20}{13}, \frac{95}{13}\right)$.

Persamaan lingkaran yang berpusat di titik $Q\left(\frac{20}{13}, \frac{95}{13}\right)$ dan memiliki jari-jari ½ adalah

$$\left(x - \frac{20}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{95}{13}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{20}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{95}{13}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

4. Alternatif Penyelesaian

a. Persamaan roda A

Jari-jari roda A adalah $r_A = 10$. Roda A menyinggung kedua sumbu, berarti titik pusat roda A adalah $P_A = (10, 10)$.

Jadi, persamaan roda A adalah

$(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 10^2$

$(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$

b. Persamaan roda B adalah $x^2 + y^2 + 28x + 147 = 0$

Pusat roda B adalah $P_B = \left(-\frac{1}{2}(28), -\frac{1}{2}(0)\right) = (-14, 0)$

Jari-jari roda B adalah $r_B = \sqrt{(-14)^2 + 0^2 - 147} = \sqrt{196 - 147} = \sqrt{49} = 7$.

(i) Jarak antara pusat kedua roda adalah Jarak P_AP_B = jarak antara titik (10, 10) dan (–14, 0)

$P_AP_B = \sqrt{(10 - (-14))^2 + (10 - 0)^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100}$

$= \sqrt{676} = 26$

Jadi, jarak antara kedua pusat roda adalah 26 × 10 cm = 260 cm.

(ii) celah terpendek di antara kedua roda adalah

$P_AP_B - (r_A + r_B)$ unit = 26 – (10 + 7) = 26 – 17 = 9 unit.

Jadi, celah terpendek di antara kedua roda adalah 9 × 10 cm = 90 cm.

5. Alternatif Penyelesaian

Lingkaran A: $(x + 12)^2 + (y + 15)^2 = 25$

Pusat lingkaran A yaitu $P_A = (-12, -15)$

Jari-jari lingkaran A yaitu $r_A = \sqrt{25} = 5$

Lingkaran C: $(x - 24)^2 + (y - 12)^2 = 100$

Pusat lingkaran C yaitu $P_C = (24, 12)$

Jari-jari lingkaran C yaitu $r_C = \sqrt{100} = 10$

Jarak antara pusat lingkaran A dan C adalah P_AP_C

$$P_AP_C = \sqrt{(24-(-12))^2 + (12-(-15))^2} = \sqrt{36^2 + 27^2}$$
$$= \sqrt{1296 + 729} = \sqrt{2025} = 45$$

Lingkaran A, B, dan C terletak pada suatu garis lurus, sehingga diameter lingkaran B adalah $P_AP_C - (r_A + r_C) = 45 - (5 + 10) = 30$.

Sehingga diperoleh jari-jari lingkaran B yaitu $r_B = ½(30) = 15$.

Titik pusat lingkaran B dapat diperoleh dari perbandingan AB : BC = 20 : 25

Koordinat B = $(x, y) = \frac{20P_C + 25P_A}{20 + 25}$

$$(x, y) = \frac{20(24,\ 12) + 25(-12, -15)}{45} = \frac{(480,\ 240) + (-300,\ -375)}{45}$$

$$(x, y) = \frac{(180,\ -135)}{45} = \left(\frac{180}{45}, \frac{-135}{45}\right) = (4, -3)$$

Jadi, persamaan lingkaran B dengan pusat $P_B = (4, -3)$ dan jari-jari $r_B = 15$ adalah

$$(x-4)^2 + (y-(-3))^2 = 15^2$$
$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 225$$

6. Alternatif Penyelesaian

$L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$

$L_1 + \lambda L_2 = 0$ dengan λ sebagai parameter

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 + \lambda(x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4) = 0$ ………… (*)

Persamaan (*) melalui titik (2, –1), berarti $x = 2$ dan $y = -1$ dapat disubstitusi ke persamaan (*) untuk menghitung parameter λ.

$2^2 + (-1)^2 + 2(2) + 2(-1) - 2 + \lambda(2^2 + (-1)^2 + 4(2) - 8(-1) + 4) = 0$

$4 + 1 + 4 - 2 - 2 + \lambda(4 + 1 + 8 - 8 + 4) = 0$

$5 + \lambda(9) = 0$

$9\lambda = -5$

$\lambda = \frac{-5}{9}$

Substitusi nilai parameter $\lambda = \frac{-5}{9}$ ke persamaan (*) untuk memperoleh persamaan lingkaran tersebut.

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 + \left(\frac{-5}{9}\right)(x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4) = 0$ ………. kalikan dengan 9

$\Leftrightarrow$ $9x^2 + 9y^2 + 18x + 18y - 18 - 5(x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4) = 0$

$\Leftrightarrow$ $9x^2 + 9y^2 + 18x + 18y - 18 - 5x^2 - 5y^2 - 20x + 40y - 20 = 0$

$\Leftrightarrow$ $4x^2 + 4y^2 - 2x + 58y - 38 = 0$

$\Leftrightarrow$ $2x^2 + 2y^2 - x + 29y - 19 = 0$

Jadi, persamaan lingkaran yang dimaksud adalah $2x^2 + 2y^2 - x + 29y - 19 = 0$.

7. Alternatif Penyelesaian

$L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 3y - 7 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 3x - 2y - 1 = 0$

$L_1 + \lambda L_2 = 0$ dengan λ sebagai parameter

$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 7 + \lambda(x^2 + y^2 + 3x - 2y - 1) = 0$ ………….. (*)

Persamaan (*) melalui titik (1, 2), berarti $x = 1$ dan $y = 2$ dapat disubstitusi ke persamaan (*) untuk menghitung parameter λ.

$1^2 + 2^2 + 2(1) + 3(2) - 7 + \lambda(1^2 + 2^2 + 3(1) - 2(2) - 1) = 0$

$1 + 4 + 2 + 6 - 7 + \lambda(1 + 4 + 3 - 4 - 1) = 0$

$6 + \lambda(3) = 0$

$3\lambda = -6$

$\lambda = -2$

Substitusi nilai parameter $\lambda = -2$ ke persamaan (*) untuk memperoleh persamaan lingkaran tersebut.

$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 7 + 2(x^2 + y^2 + 3x - 2y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 3y - 7 + 2x^2 + 2y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 8x - y - 9 = 0$

Jadi, persamaan lingkaran yang dimaksud adalah $3x^2 + 3y^2 + 8x - y - 9 = 0$.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda tahu yang dimaksud kedudukan dua lingkaran?	◯	◯
2	Apakah Anda tahu yang dimaksud berkas lingkaran?	◯	◯
3	Apakah Anda dapat menentukan kedudukan dua lingakaran yang diketahui persamaannya?	◯	◯
4	Apakah Anda dapat menentukan persamaan berkas lingkaran?	◯	◯
5	Apakah Anda dapat menyelesaikan masalah yang terkait kedudukan dua lingkaran?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

1. Pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ berturut-turut adalah ....
   B. $(-2, 3)$ dan 4
   C. $(-2, 3)$ dan 5
   D. $(-2, 3)$ dan 6
   E. $(2, -3)$ dan 4
   F. $(2, -3)$ dan 5

2. Lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + by - 12 = 0$ melalui titik (1, 7). Titik pusat lingkaran itu adalah ....
   A. $(-2, -3)$
   B. $(-2, 3)$
   C. $(2, 3)$
   D. $(2, 4)$
   E. $(2, 6)$

3. Persamaan lingkaran dengan pusat (–1, 3) dan menyinggung sumbu Y adalah ....
   A. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$
   B. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$
   C. $x^2 + y^2 - x + 3y + 1 = 0$
   D. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$
   E. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$

4. Diketahui lingkaran $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3py - 30 = 0$ melalui titik (–2, 1). Persamaan lingkaran yang sepusat tapi panjang jari-jarinya dua kali panjang jari-jari lingkaran tersebut adalah ....
   A. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y - 90 = 0$
   B. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 90 = 0$
   C. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 90 = 0$
   D. $x^2 + y^2 - x + 6y + 90 = 0$
   E. $x^2 + y^2 - x - 6y - 90 = 0$

5. Persamaan lingkaran dengan pusat P(3, 1) dan menyinggung garis $3x + 4y + 7 = 0$ adalah ....
   A. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$
   B. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$
   C. $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$
   D. $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 9 = 0$
   E. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

6. Persamaan lingkaran yang pusatnya terletak pada garis $2x - 4y - 4 = 0$ serta menyinggung sumbu X negatif dan sumbu Y negatif adalah ....
   A. $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$
   B. $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8 = 0$
   C. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4 = 0$
   D. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$
   E. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$

7. Diketahui lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + mx + 4y + 3 = 0$ dan titik P(4, 1) terletak pada lingkaran. Titik A dan B yang masing-masing terletak di dalam lingkaran tersebut adalah ….
   A. A(2, -1) dan B(4, -4)
   B. A(2, -1) dan B(2, 1)
   C. A(1, 1) dan B(4, -4)
   D. A(0,-3) dan B(4, -5)
   E. A(0, -3) dan B(1, 1)

8. Diketahui lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 = 0$. Kedudukan garis $y = -2x + 17$ terhadap lingkaran tersebut adalah ….
   A. garis memotong lingkaran pada dua titik
   B. garis tidak memotong lingkaran
   C. garis menyinggung lingkaran
   D. garis terletak pada lingkaran
   E. garis membagi dua lingkaran sama besar

9. Diketahui lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 5$. Jika garis $y = mx + 5$ menyinggung lingkaran, maka nilai m adalah ….
   A. 2
   B. 1
   C. ½
   D. –½
   E. –2

10. Lingkaran $x^2 + y^2 - Ax - 10y + 4 = 0$ menyinggung sumbu X. Nilai A yang memenuhi adalah ….
    A. –8 dan 8
    B. –6 dan 6
    C. –5 dan 5
    D. –4 dan 4
    E. –2 dan 2

11. Persamaan salah satu garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 12$ yang melalui titik P(0, 4) adalah ….
    A. $x\sqrt{3} + 3y = 12$
    B. $x\sqrt{3} + 3y = 4$
    C. $-x\sqrt{3} + 3y = 6$
    D. $-x\sqrt{3} + 3y = 4$
    E. $x\sqrt{3} + y = 12$

12. Garis singgun di titik (12, –5) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 169$ menyinggung lingkaran $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = p$. Nilai p sama dengan ….
    A. 207
    B. 169
    C. 117
    D. 19
    E. 13

13. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$ yang melalui titik (3, –2) adalah ….
    A. $2x - 3y = -13$
    B. $2x - 3y = 13$
    C. $3x - 2y = -14$
    D. $3x - 2y = 13$
    E. $3x + 2y = 13$

14. Persamaan garis singgung lingkaran $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 40$ yang tegak lurus garis $x + 3y + 5 = 0$ adalah ….
    A. $y = 3x + 1$ dan $y = 3x - 30$
    B. $y = 3x + 2$ dan $y = 3x - 32$
    C. $y = 3x - 2$ dan $y = 3x - 32$
    D. $y = 3x + 5$ dan $y = 3x - 35$
    E. $y = 3x - 5$ dan $y = 3x - 35$

15. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ di titik P(5, 3) adalah ….
    A. $3x - 4y + 27 = 0$
    B. $3x + 4y - 27 = 0$
    C. $3x + 4y - 7 = 0$
    D. $7x + 4y - 17 = 0$
    E. $7x + 4y - 7 = 0$

16. Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang tegak lurus garis $2y - x + 3 = 0$ adalah ….
    A. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\sqrt{5}$
    B. $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\sqrt{5}$
    C. $y = 2x - 5$
    D. $y = -2x + 5\sqrt{5}$
    E. $y = 2x + 5$

17. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 7 = 0$ di titik yang berabsis 5 adalah ….
    A. $4x - y - 18 = 0$
    B. $4x - y + 4 = 0$
    C. $4x - y + 10 = 0$
    D. $4x + y - 4 = 0$
    E. $4x + y - 15 = 0$

18. Diketahui dua lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 26 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$. Kedudukan kedua lingkaran tersebut adalah ….
    A. berpotongan pada dua titik
    B. bersinggungan luar
    C. bersinggungan dalam
    D. tidak berpotongan
    E. berpotongan tegak lurus

19. Diketahui dua lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 18x - 12y + 65 = 0$. Jarak pusat kedua lingkaran tersebut adalah ....
    A. 25
    B. 24
    C. 13
    D. 12
    E. 10

20. Diketahui dua lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 20 = 0$. Persamaan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran tersebut dan melalui titik A(4, 2) adalah ....
    A. $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$
    B. $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$
    C. $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$
    D. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$
    E. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. B
2. B
3. D
4. C
5. C
6. A
7. A
8. C
9. E
10. D
11. A
12. E
13. D
14. D
15. B
16. D
17. A
18. C
19. C
20. A

DAFTAR PUSTAKA

Marthen K, Hadi N, Ghany A. 2019. *Matematika untuk Siswa SMA/MA Kelas XI Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam*. Bandung: Yrama Widya.

Noormandiri, B.K. 2005. *Matematika SMA untuk Kelas XI Program Ilmu Alam Jilid 2A*. Jakarta: Erlangga

Untung Trisna Suwaji. 2019. *Lingkaran*. Unit Pembelajaran Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan (PKB) Melalui Peningkatan Kompetensi Pembelajaran (PKP) Berbasis Zonasi. Jakarta: Kemendikbud.

Untung Trisna Suwaji, Himmawati. 2018. *Geometri dan Irisan Kerucut*. Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan Guru Matematika SMA. Jakarta: Kemendikbud.